

1 Dyskretna transformata Fouriera

Dla ciągu liczbowego

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

takiego, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty, \quad (1.1)$$

dyskretną transformatę Fouriera definiuje się jako

$$\bar{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}.$$

Zgodnie z odwrotną transformatą

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

Twierdzenie 1.1 (wzór Plancherela) *Jeśli ciąg x_n spełnia (1.1), to*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Dowód. Korzystając z definicji transformaty i jej odwrotności, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}(\omega) e^{j\omega n} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\omega n} \right) \bar{X}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}^*(\omega) \bar{X}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Jeśli ponadto

$$x_n = 0, \text{ dla } n < 0,$$

to ciąg ma także transformatę Z o postaci $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$. Jest zatem oczywiste, że

$$X(e^{j\omega}) = \bar{X}(\omega),$$

skąd wynika, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

2 Sygnały z czasem dyskretnym

Ciąg

$$\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots \quad (2.1)$$

zmiennych losowych o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa jak X jest dyskretnym stacjonarnym procesem stochastycznym. Wszystkie nasze procesy są stacjonarne i mają zerową średnią (tzn. $EX_n = 0$).

2.1 Funkcja korelacji, gęstość widmowa

Funkcją korelacji procesu (2.1) jest

$$R(n) = E\{X_{n+m}X_m\}, \quad (2.2)$$

gdzie m jest dowolne.

Własność 2.1 *Funkcja korelacji ma następujące własności:*

- (a) $R(-n) = R(n)$,
- (b) $|R(n)| \leq R(0)$,
- (c) $R(0) = EX^2$,
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = E^2 X$.

Dowód. Własności (a) oraz (c) są oczywiste, natomiast (b) wynika stąd, że $E^2|X_0X_n| \leq EX^2EX^2$. Własność (d), której nie dowodzimy, oznacza, że korelacja pomiędzy zmiennymi losowymi X_m i X_{m+n} , m dowolne, maleje do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. \square

Gęstość widmowa zdefiniowana jak następuje:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) e^{-j\omega n}, \quad (2.3)$$

jest dyskretną transformatą Fouriera funkcji korelacji. Ponadto

$$R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\omega) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.4)$$

Ponieważ $R(0) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} S(\omega) d\omega$, z Własności 2.1 (punkt (c)) wynika, że

$$EX^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

Dla procesów X_n i Y_n ,

$$R_{XY}(n) = E\{X_{n+m}Y_m\},$$

m dowolne, nazywa się funkcją korelacji wzajemnej, a jej całkę Fouriera

$$S_{XY}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{XY}(n) e^{-j\omega n}$$

funkcją wzajemnej gęstości widmowej. Oznaczając $Z_n = X_n + Y_n$, możemy napisać:

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n) + R_{XY}(n) + R_{YX}(n),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega).$$

Jeśli procesy X_n i Y_n nie są skorelowane, tzn. jeśli $E\{X_n Y_m\} = EXEY$, to

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n) + 2EXEY.$$

Jeśli ponadto $EX = EY = 0$, to

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n)$$

oraz

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega).$$

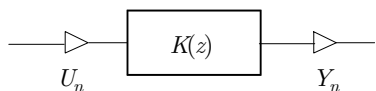
2.2 Biały szum

Jeśli $R(n) = \sigma^2 \delta_n$, gdzie δ_n jest dyskretnym impulsem Diraca, to mówimy, że proces jest białym szumem. Zauważmy, że w procesie tym $EX_n X_m = 0$, dla $n \neq m$, co oznacza, że zmienne X_n i X_m , nie są skorelowane. Dla procesu takiego $S(\omega) = 2\pi\sigma^2$.

3 Sygnały losowe w systemach dyskretnych

Zakładamy teraz, że stabilny system o transmitancji $K(z)$ pobudzany jest stacjonarnym białym szumem U_n o zerowej średniej, patrz rys. 3.1, i funkcji korelacji.

$$R_U(n) = \sigma_U^2 \delta_n. \tag{3.1}$$



Rys. 3.1: System dyskretny o losowym sygnale wejściowym.

Zatem

$$Y_n = \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} U_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i U_{n-i}, \tag{3.2}$$

gdzie k_0, k_1, k_2, \dots jest odpowiedzią impulsową systemu, bowiem $k_i = 0$ dla $i = -1, -2, \dots$. Dla wygody, będziemy niekiedy pisać U i Y w miejsce U_n i Y_n .

Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{-j\omega n} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i e^{-j\omega i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{n-i} e^{-j\omega(n-i)} \\ &= K(e^{j\omega}) \bar{U}(\omega), \end{aligned}$$

co oznacza, że

$$\bar{Y}(\omega) = K(e^{j\omega}) \bar{U}(\omega),$$

gdzie $\bar{Y}(\omega)$ i $\bar{U}(\omega)$ są dyskretnymi transformacjami Fouriera odpowiednio sygnałów na wyjściu i wejściu systemu.

Zbadamy teraz własności stacjonarnego losowego sygnału wyjściowego.

Własność 3.1 *Jeśli sygnał wejściowy jest białym szumem o funkcji korelacji (3.1), to*

- (α) $EY = 0, EY^2 = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2,$
- (β) $R_Y(n) = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{n+i} k_i,$
- (γ) $EY^2 = \sigma_U^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(e^{j\omega})|^2 d\omega,$
- (δ) $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(e^{j\omega})|^2,$
- (ϵ) $R_{YU}(n) = \sigma_U^2 k_n.$

Dowód. Na mocy definicji

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= E\{Y_n Y_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_{n-i} k_{-j} E\{U_i U_j\} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{n-i} k_i, \end{aligned}$$

skąd wynika (β). Z (3.2) wynika, że $EY_n = \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} EU_i = 0$. Ponadto

$$EY^2 = R_Y(0) = \sigma_U^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n^2,$$

co dowodzi (α). Zatem

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_Y(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{n+p} k_p e^{-j\omega n} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{n+p} e^{-j\omega(n-p)} \right] k_p e^{j\omega p} \\ &= \sigma_U^2 \bar{K}(\omega) \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_p e^{j\omega p} = \sigma_U^2 \bar{K}(\omega) \bar{K}(-\omega), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{K}(\omega)$ jest transformacją Fouriera odpowiedzi impulsowej k_n . Ponieważ $\bar{K}(\omega) = K(e^{j\omega})$, gdzie $K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ jest transformacją \mathcal{Z} ciągu k_n , oraz $\bar{K}(-\omega) = K^*(e^{j\omega})$, zatem $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(e^{j\omega})|^2$, co oznacza, że (δ) jest prawdziwe.

Ponieważ $EY^2 = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} S_Y(\omega) d\omega$, zatem wnioskujemy o prawdziwości (γ). Na koniec zauważmy, że

$$R_{YU}(n) = E\{Y_n U_0\} = \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} E\{U_i U_0\} = \sigma_U^2 k_n,$$

co oznacza, że (ϵ) także jest prawdziwe. □

4 Regulacja automatyczna

Przedmiotem naszej analizy będzie układ automatycznej regulacji w sytuacji, gdy przychodzące sygnały mają charakter losowy. Zbadamy dwie sytuacje, w których

- wartość zadana jest sygnałem losowym
- deterministyczny sygnał wartości zadanej jest zakłócony szumem.

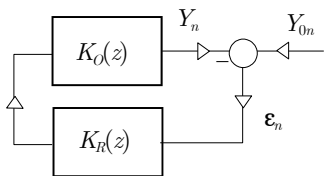
4.1 Wartość zadana procesem stochastycznym

Sygnał zadany Y_0 jest białym szumem o gęstości widmowej $\text{var}[Y_0]$, patrz system na rys. 4.1. Ponieważ $S_E(\omega) = \text{var}[Y_0] |K_E(j\omega)|^2$ oraz

$$K_E(z) = \frac{M(z)}{L(z) + M(z)}$$

więc

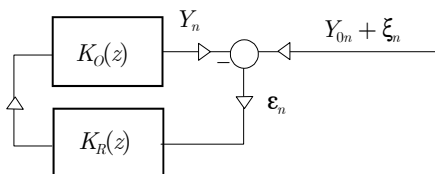
$$\begin{aligned} E\epsilon_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \text{var}[Y_0] \int_0^{2\pi} |K_E(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{var}[Y_0] \int_0^{2\pi} \left| \frac{M(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$



Rys. 4.1: Układ automatycznej regulacji. Sygnał wartości zadanej biały szumem

4.2 Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Zbadamy teraz zachowanie się układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy do systemu dociera deterministyczny sygnał zadany Y_{0n} zaszumiony białym sygnałem losowym ξ_n o średniej zero, co przedstawiono na rys. 4.2. O jakości systemu świadczy nie uchyb $\varepsilon_n = Y_{0n} + \xi_n - Y_n$, lecz błąd $e_n = Y_{0n} - Y_n$, który powinien być mały.



Rys. 4.2: Zaszumiony sygnał wartości zadanej.

Aby wyznaczyć ten błąd, zauważmy, że $e_n = \varepsilon_n - \xi_n$, skąd wynika

$$\mathcal{Z}\{e_n\} = \mathcal{Z}\{\varepsilon_n\} - \mathcal{Z}\{\xi_n\}.$$

Ponieważ

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon_n\} = K_E(z) [Y_0(z) + \mathcal{Z}\{\xi_n\}],$$

zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{e_n\} &= K_E(z) [Y_0(z) + \mathcal{Z}\{\xi_n\}] - \mathcal{Z}\{\xi_n\} \\ &= K_E(z)Y_0(z) + [K_E(z) - 1] \mathcal{Z}\{\xi_n\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$e_n = e_{dn} + e_{\xi n},$$

przy czym

$$\mathcal{Z}\{e_{dn}\} = K_E(z)Y_0(z)$$

oraz

$$\mathcal{Z}\{e_{\xi n}\} = [K_E(z) - 1] \mathcal{Z}\{\xi_n\} = -\frac{-L(z)}{L(z) + M(z)} \mathcal{Z}\{\xi_n\}.$$

Błąd e zawiera dwie składowe, deterministyczną e_d i losową e_ξ . Ta pierwsza była przedmiotem analizy w ramach przedmiotu Podstawy Automatyki. Jeśli chodzi o drugą, to

$$\begin{aligned} Ee_\xi^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{e_\xi}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{var}[\xi] \int_0^{2\pi} \left| \frac{L(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

5 Identyfikacja systemów

Jeśli sygnał wejściowy systemu jak na rys. 3.1 jest stacjonarnym białym szumem, to

$$\begin{aligned} EY_m U_0 &= \sum_{i=-\infty}^m k_{m-i} E\{U_i U_0\} \\ &= EU^2 \sum_{i=-\infty}^n k_{m-i} \delta_i = EU^2 k_m, \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$k_m = \frac{EY_m U_0}{EU^2}.$$

Naturalnym estymatorem k_m jest

$$\hat{k}_m = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i+m} U_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i},$$

gdzie

$$(U_1, Y_1), (U_2, Y_2), (U_3, Y_3), \dots$$

są pomiarami wykonanymi na wejściu i wyjściu systemu.

Z prawa wielkich liczb wynika zbieżność średniokwadratowa licznika do $EY_m U_0$ oraz mianownika do EU^2 w sytuacji, gdy $n \rightarrow \infty$. W rezultacie

$$\hat{k}_m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k_m$$

według prawdopodobieństwa.