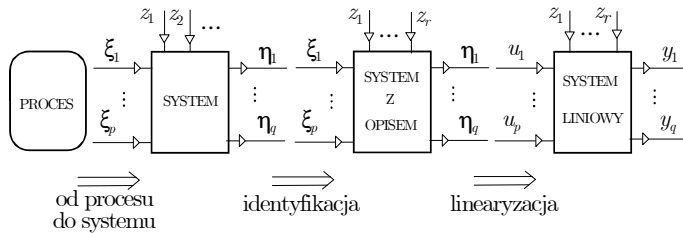


## 1 Wprowadzenie

Przedstawimy drogę, która prowadzi od rzeczywistego procesu do tego co będziemy nazywać systemem.

### Proces

Rzeczywisty proces może mieć różnorodny charakter. Może to być np. zespół zjawisk zachodzących w reaktorze chemicznym, kotle ciepłowniczym, czy na rynku pewnego produktu. Procesem tym może być także np. lecący samolot. Natura zachodzących zjawisk może być całkowicie dowolna, mogą one mieć charakter np. chemiczny, fizyczny, ekonomiczny czy też np. społeczny.



Rys. 1.1: Od procesu do systemu liniowego.

### Od procesu do systemu

W procesie ustalamy zestaw wielkości wyjściowych  $\eta_1, \dots, \eta_q$ , rys. 1.1, odnośnie do których będziemy stawiać pewne wymagania, a które nazywamy wielkościami wyjściowymi. Następnie określamy wielkości wejściowe  $\xi_1, \dots, \xi_p$ , za pomocą których będziemy się starali oddziaływać na proces tak, aby ustalone przed chwilą wielkości wyjściowe zachowywały się w pożądanym sposób. Pozostałe, w nieznannej zazwyczaj liczbie, oznaczone jako  $z_1, z_2, \dots$ , mające wpływ na wyjścia są zakłóceniami. Niektórych takich wielkości zakłócających możemy nawet nie znać. Wynikiem tych wszystkich podjętych przez nas wyborów jest to, co nazywamy systemem. Jest to zatem proces z wyróżnionymi zestawami wielkości wejściowych i wyjściowych poddany działaniom zakłóceń.

### Identyfikacja systemu

Kolejną czynność, to sporządzenie opisu systemu, np. równania różniczkowego. Procedura ustalania opisu nazywa się identyfikacją systemu. Wykonywana jest ona na podstawie tzw. informacji apriorycznej o systemie, np. równań wynikających z praw fizyki, oraz danych empirycznych, czyli wyników pomiarów przeprowadzonych na sygnałach wejściowych i wyjściowych systemu.

### Linearyzacja

Otrzymany opis, np. wspomniane równanie różniczkowe, jest zazwyczaj nieliniowy. Jeśli nieliniowości nie są znaczne, to po przeprowadzeniu linearyzacji wokół nominalnego punktu pracy otrzymujemy system dynamiczny opisywany liniowym równaniem różniczkowym.

**Przykład 1.1** Niech procesem będzie zespół zjawisk zachodzących w lecącym samolocie. Przyjmując wysokość lotu, kurs i szybkość jako wielkości wyjściowe oraz położenie sterów wysokości, kierunku oraz natężenie dopływu paliwa jako wejściowe, proces ten traktujemy jako system dynamiczny o trzech wejściach oraz trzech wyjściach. Zakłóceniami są np. szybkość i kierunek wiatru czy też ciśnienie powietrza. Korzystając następnie z praw aerodynamiki i danych pomiarowych ustala się w procesie identyfikacji opis takiego systemu, np. w postaci równań różniczkowych.

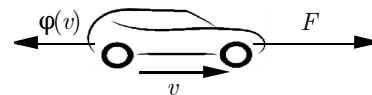
**Przykład 1.2** W tzw. procesie pH do zbiornika, w którym zachodzi proces mieszania, wlewa się trzy substancje, zasadę, kwas i, ze stałym natężeniem dopływu, stabilizator. Celem jest otrzymanie cieczy o zadanym pH, tzn. o zadanym poziomie kwasowości. Jako wielkości wyjściowe można przyjąć poziom cieczy w zbiorniku oraz współczynnik pH w cieczy go opuszczającej. Wielkości wejściowe, to natężenia dopływu kwasu i zasady. Tak zdefiniowany system ma po dwie wielkości wejściowe i wyjściowe.

## 2 Linearyzacja

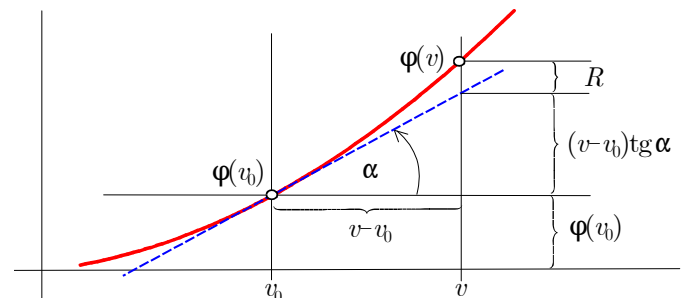
Ideę linearyzacji przedstawimy na przykładzie procesu jakim jest poruszający się samochód, rys 2.1. Przy braku tarcia ruch samochodu o masie  $m$  pod wpływem siły  $F$  po poziomej płaszczyźnie można opisać równaniem

$$mv'(t) + \varphi(v(t)) = F(t), \quad (2.1)$$

gdzie  $v$  jest prędkością,  $\varphi(v)$  oporem powietrza zależnym nieliniowo od prędkości, co wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona.



Rys. 2.1: Samochód poruszający się z prędkością  $v(t)$  pod wpływem siły  $F(t)$  przy sile oporu  $\varphi(t)$ .



Rys. 2.2: Charakterystyka nieliniowa  $\varphi(v)$  (linia ciągła) i jej przybliżenie wokół punktu  $v_0$  (linia prosta przerywana).

Przeprowadzimy teraz procedurę linearyzacji, rys. 2.2. Punktem pracy jest  $(F_0, v_0)$ , gdzie  $v_0$  jest stałą prędkością osiąganą przez samochód pod wpływem siły  $F_0$ , tzn. takiej, dla której

$$\varphi(v_0) = F_0, \quad (2.2)$$

bowiem wówczas  $v'(t) = 0$ . Z rysunku wynika, że

$$\varphi(v) = \varphi(v_0) + a(v - v_0) + R,$$

gdzie  $a = \varphi'(v_0) = \text{tg } \alpha$ . Pomijając  $R$ , czyli tzw. resztę w tym rozwinięciu funkcji  $\varphi(\cdot)$  wokół punktu  $v_0$ , i godząc się na błąd z tego wynikający, otrzymujemy

$$\varphi(v) = \varphi(v_0) + (v - v_0)a,$$

co pozwala przejść od nieliniowego równania (2.1) do jego przybliżonej postaci liniowej jak poniżej:

$$mv'(t) + \varphi(v_0) + a(v(t) - v_0) = F(t), \quad (2.3)$$

czyli

$$m(v(t) - v_0)' + a(v(t) - v_0) = F(t) - \varphi(v_0),$$

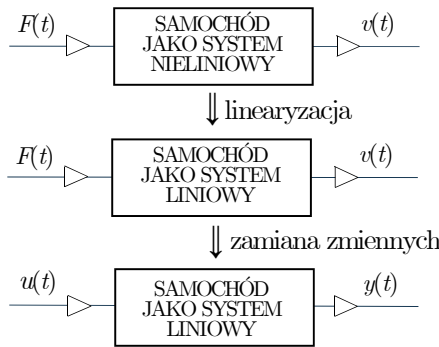
bowiem  $v_0' = 0$ . Uwzględniając równanie punktu pracy (2.2), otrzymujemy zatem

$$m(v(t) - v_0)' + \alpha(v(t) - v_0) = F(t) - F_0.$$

Wprowadzając następnie nowe zmienne o charakterze względnym świadczące o odchyleniu od punktu pracy, a mianowicie:  $u(t) = F(t) - F_0$  oraz  $y(t) = v(t) - v_0$ , dochodzimy ostatecznie do równania liniowego o postaci

$$my'(t) + ay(t) = u(t). \quad (2.4)$$

W pierwszym kroku procedura linearyzacji przybliżyła charakterystykę nieliniową  $\varphi(v)$  charakterystyką liniową  $\varphi(v_0) + (v - v_0)a$ , w drugim zamieniła zmienne  $(F, v)$  na  $(u, y)$ . Jej pierwszy krok, to przejście od nieliniowego równania (2.1) do jego liniowego przybliżenia (2.3), drugi prowadzi od (2.3) do (2.4) i polega na zamianie zmiennych. Innymi słowy, system nieliniowy o wejściu  $F(t)$  i wyjściu  $v(t)$  procedura ta zastąpiła systemem liniowym o wejściu  $u(t)$  i wyjściu  $y(t)$ , rys. 2.3. Poczynione przy tym przybliżenie polega na pominięciu składnika  $R$ .



Rys. 2.3: Samochód. Od systemu nieliniowego do liniowego.

Liniowe równania (2.3) i (2.4) opisują w sposób przybliżony ruch samochodu, gdy działająca siła i wynikająca z niej prędkość niewiele różnią się od  $F_0$  i  $v_0$ , czyli punktu pracy, bowiem pominięty składnik  $R$  jest wtedy mały. Zauważmy przy tym, że, jeśli realny system, czyli samochód znajduje się w punkcie pracy, to w pierwszym z tych równań jest tak, że  $F(t) = F_0$  oraz  $v(t) = v_0$ , w drugim, natomiast,  $u(t) = 0$  i  $y(t) = 0$ .

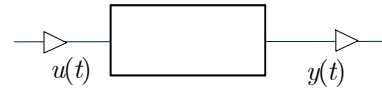
Z przykładu wynika uwaga o charakterze ogólnym. Sygnały  $\xi(t)$  oraz  $\eta(t)$  w systemie rzeczywistym, rys. 1.1, mają charakter bezwzględny, natomiast sygnały  $u(t)$  oraz  $y(t)$  w systemie liniowym są względne, gdyż świadczą o odchyleniu  $\xi(t)$  od  $\xi_0$  oraz  $\eta(t)$  od  $\eta_0$ , gdzie  $(\xi_0, \eta_0)$  jest punktem pracy. Sytuacja  $u(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$  oznacza bowiem, że  $\xi(t) = \xi_0$  i  $\eta(t) = \eta_0$ , tzn. że system znajduje się w punkcie pracy.

### 3 System dynamiczny

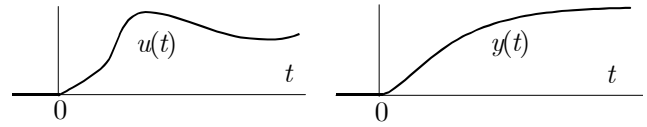
W systemie dynamicznym jak na rys. 3.1 wejściem, czyli pobudzeniem, jest sygnał  $u(t)$ , wyjściem jest  $y(t)$ . Pobudzenie jest sygnałem takim, że

$$u(t) = 0, \text{ dla wszystkich } t < 0, \quad (3.1)$$

rys. 3.2. Przedstawimy teraz kolejno różne sposoby opisu relacji pomiędzy pobudzeniem  $u(t)$  i reakcją  $y(t)$ .



Rys. 3.1: Liniowy system dynamiczny.



Rys. 3.2: Przykład reakcji systemu na pobudzenie.

## 4 Równanie różniczkowe

Podstawowym opisem systemu jest liniowe równanie różniczkowe

$$a_m y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + a_{m-2} y^{(m-2)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_l u^{(l)} + b_{l-1} u^{(l-1)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \quad (4.1)$$

rzędu  $m$ , któremu towarzyszy warunek początkowy

$$y(0_-), y^{(1)}(0_-), y^{(2)}(0_-), \dots, y^{(m-1)}(0_-), \quad (4.2)$$

tzn. zestaw  $m$  liczb. Aby nie komplikować zapisu, przy zmiennych  $y$  oraz  $u$  pominięliśmy argument  $t$ , zamiast np.  $y^{(k)}(t)$  napisaliśmy po prostu  $y^{(k)}$ . Jego rozwiązanie, czyli  $y(t)$ , jest reakcją na pobudzenie  $u(t)$  przy podanym warunku początkowym. Aby je wyznaczyć, skorzystamy z narzędzia jakim jest transformacja Laplace'a.

Zacznijmy od przypomnienia<sup>1</sup>, że  $y^{(1)}(t) \hat{=} sY(s) - y(0_-)$ ,  $y^{(2)}(t) \hat{=} s^2 Y(s) - sy(0_-) - y^{(1)}(0_-)$ , itd. Ogólnie

$$y^{(k)}(t) \hat{=} s^k Y(s) - P_{k-1}(s),$$

gdzie  $P_{k-1}(s) = s^{k-1} y(0_-) + \dots + sy^{(k-2)}(0_-) + y^{(k-1)}(0_-)$  jest wielomianem stopnia  $k-1$ . Zatem transformacja lewej strony równania (4.1) prowadzi do wyrażenia

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) - W_{m-1}(s),$$

w którym

$$W_{m-1}(s) = a_m P_{m-1}(s) + a_{m-1} P_{m-2}(s) + \dots + a_1 P_0(s)$$

jest wielomianem stopnia  $m-1$ . Jego współczynniki zależą od warunku początkowego (4.2) i współczynników  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  równania.

Wynikiem transformacji prawej strony jest natomiast

$$(b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s),$$

gdź  $u(0_-) = u^{(1)}(0_-) = \dots = u^{(l-1)}(0_-) = 0$ , a to z uwagi na (3.1).

Obustronna transformacja równania (4.1) doprowadza zatem do równania jak poniżej:

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) - W_{m-1}(s) = (b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s).$$

W rezultacie możemy napisać, że

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)} U(s) + \frac{W_{m-1}(s)}{M(s)}, \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>patrz: 1. TRANSFORMACJA LAPLACE'A, § 2.3.

gdzie

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (4.4)$$

który to wielomian jest nazywany charakterystycznym, oraz  $L(s) = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0$ . Aby wyznaczyć  $y(t)$ , np. metodą rozkładu na ułamki proste, należy rozwiązać równanie charakterystyczne

$$M(s) = 0, \quad (4.5)$$

czyli wyznaczyć jego pierwiastki

$$s_1, s_2, \dots, s_m. \quad (4.6)$$

Niestety, można to uczynić jedynie dla  $m \leq 4$ , bowiem dla większych wartości  $m$  zadanie to, poza szczególnymi przypadkami, jest niewykonalne. Otrzymanie jawnej postaci rozwiązania nie jest zatem możliwe.

Z (4.3) wynika niemniej jednak, że

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{M(s)} U(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W_{m-1}(s)}{M(s)} \right\}. \quad (4.7)$$

Reakcja  $y(t)$  systemu będąca sumą dwóch składowych, zależy więc od:

- ▶ pobudzenia  $u(t)$ ,
- ▶ warunku początkowego,
- ▶ własności systemu, czyli  $a_m, \dots, a_0$  oraz  $b_l, \dots, b_0$ .

Pierwsza składowa zależy od

- ▶ pobudzenia,
- ▶ własności systemu,
- ▷ lecz nie zależy od warunku początkowego.

Jest ona odpowiedzią systemu na pobudzenie  $u(t)$  w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy, tzn. gdy  $W_{m-1}(s) \equiv 0$ .

Druga składowa zależy od

- ▶ warunku początkowego,
- ▶ własności systemu,
- ▷ lecz nie zależy od pobudzenia.

Jest ona zatem wyjściem systemu, gdy pobudzenie jest zerowe.

**Przykład 4.1** *Dokonując transformacji obydwu stron równania  $y' + ay = bu$ , otrzymujemy  $sY(s) + Y(s) - y(0_-) = U(s)$ , skąd wynika, że*

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} U(s) + \frac{y(0_-)}{s+a}.$$

**Przykład 4.2** *Dla systemu o równaniu różniczkowym*

$$2y'' + 3y' + 4y = 5u' + 6u,$$

*transformacja Laplace'a doprowadza do równania*

$$2[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] + 3[sY(s) - y(0_-)] + 4Y(s) = (5s + 6)U(s).$$

*W rezultacie*

$$Y(s) = \frac{5s + 6}{2s^2 + 3s + 4} U(s) + \frac{2y(0_-)s + (2y'(0_-) + 3y(0_-))}{2s^2 + 3s + 4}.$$

## 5 Transmitancja

Transmitancją systemu opisywanego równaniem różniczkowym (4.1), nazywamy ułamek

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (5.1)$$

Transmitancja jest funkcją wymierną, tzn. ilorazem dwóch wielomianów. Pierwiastki (4.6) równania charakterystycznego (4.5), czyli pierwiastki charakterystyczne, są nazywane jej biegunami.

Używając pojęcia transmitancji, relacje (4.3) i (4.7) możemy zapisać jako

$$Y(s) = K(s)U(s) + \frac{W_{m-1}(s)}{M(s)}$$

oraz

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{K(s)U(s)\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W_{m-1}(s)}{M(s)} \right\}.$$

Wynika stąd, że, jeśli warunek początkowy jest zerowy, czyli jeśli  $W_{m-1}(s) \equiv 0$ , to

$$Y(s) = K(s)U(s). \quad (5.2)$$

Z uwagi na to, ułamek

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

może być alternatywną definicją transmitancji, pod warunkiem jednak, że warunek początkowy jest zerowy.

**Przykład 5.1** *System o równaniu różniczkowym*

$$ay' + by = cu,$$

*ma transmitancję*

$$\frac{c}{as + b}.$$

**Przykład 5.2** *Transmitancją systemu o równaniu*

$$y^{(3)} + 5y^{(2)} + 3y = u^{(1)} + 2u$$

*jest*

$$\frac{s + 2}{s^3 + 5s^2 + 3}.$$

**Przykład 5.3** *Równaniem różniczkowym systemu o transmitancji*

$$\frac{4s + 5}{s^2 + 2s + 3}$$

*jest*

$$y'' + 2y' + 3 = 4u' + 5u.$$

### 5.1 Liniowość

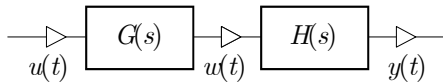
System jest nazywany liniowym, ponieważ opisywany jest liniowym równaniem różniczkowym. Co więcej, jest liniowy także pod względem własności, o ile warunek początkowy jest zerowy.

**Własność 5.1 (liniowość)** *Niech warunek początkowy będzie zerowy. Jeśli na pobudzenia  $u_1$  i  $u_2$  reakcjami systemu są  $y_1$  i  $y_2$ , to reakcją na  $au_1 + bu_2$  jest  $ay_1 + by_2$ . Jeśli na  $u$  reakcją jest  $y$ , to reakcją na  $u'$  jest  $y'$ , na  $\int_0^t u$  jest  $\int_0^t y$ .*

## 5.2 Struktury

Systemy dynamiczne można łączyć tworząc różne struktury. Transmitancja połączenia szeregowego, rys. 5.1, wynosi  $G(s)H(s)$ , bowiem

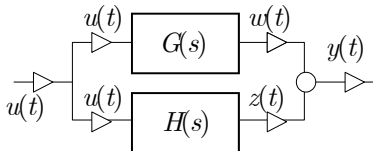
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)} = H(s)G(s).$$



Rys. 5.1: Połączenie szeregowe.

Transmitancja połączenia równoległego, rys. 5.2, jest równa  $G(s) + H(s)$ , bowiem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} + \frac{Z(s)}{U(s)} = G(s) + H(s)$$

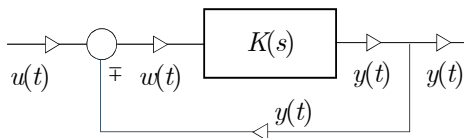


Rys. 5.2: Połączenie równoległe.

System ze sprzężeniem zwrotnym, rys. 5.3, ma transmitancję

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s)}{1 \pm K(s)},$$

co wynika z zależności  $Y(s) = K(s)W(s)$  i  $W(s) = U(s) \mp Y(s)$ . Przy znaku "-" mówimy o sprzężeniu ujemnym, przy "+" dodatnim.



Rys. 5.3: Sprzężenie zwrotne.

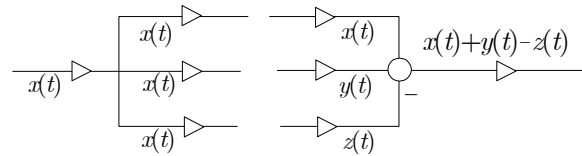
**Uwaga 5.1** Na schematach używa się elementów, które wyjaśnia rys. 5.4.

## 6 Splot

W sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy, obowiązuje relacja (5.2), z której wynika, że wyjście można wyrazić jak poniżej

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t k(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

gdzie  $k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}$ . Sygnał wyjściowy jest wyrażony przy pomocy splotu funkcji  $k(t)$  i  $u(t)$ .



Rys. 5.4: Węzeł zaczepowy (po lewej) i sumacyjny (po prawej).

## 7 Transmitancja widmowa

Transmitancja widmowa to

$$K(j\omega),$$

przy czym zmienną  $\omega$  nazywa się częstotliwością. Jest ona powiązana z reakcją systemu na wymuszenie sinusoidalne, patrz § 9.3, a jej graficzne przedstawienie, to charakterystyki częstotliwościowe, które omówimy w dalszych częściach.

**Przykład 7.1** Dla systemu o transmitancji

$$K(s) = \frac{2}{3s+4}$$

transmitancją widmową jest

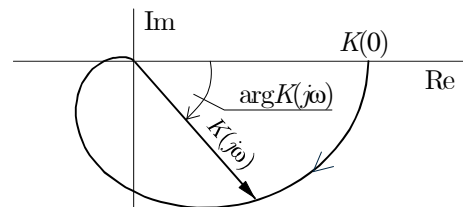
$$K(j\omega) = \frac{2}{3j\omega+4} = \frac{8}{16+9\omega^2} - j\frac{6\omega}{16+9\omega^2}.$$

## 8 Charakterystyki częstotliwościowe

Transmitancja widmowa jest przedstawiana w postaci wykresów, które nazywamy charakterystykami częstotliwościowymi. Przedstawiają one  $K(j\omega)$  dla  $\omega$  zmieniającego się w zakresie  $[0, \infty)$ . Ponieważ charakterystyki te są wykresami na płaszczyźnie, a funkcja  $K(j\omega)$  jest tworem trójwymiarowym (wymiarzy te to:  $\omega$ ,  $\text{Re } K(j\omega)$ ,  $\text{Im } K(j\omega)$ ), może być ich wiele, tak jak może być wiele różnych przedstawień kształtów trójwymiarowych na płaszczyźnie.

### 8.1 Charakterystyka amplitudowo-fazowa

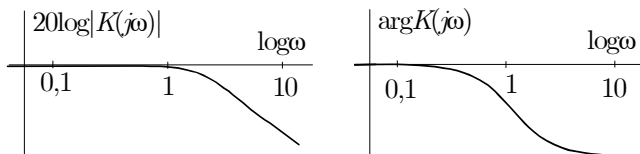
Wykres  $K(j\omega)$  na płaszczyźnie liczb zespolonych, patrz rys. 8.1, nazywa się charakterystyką amplitudowo-fazową. Różne punkty charakterystyki odpowiadają różnym wartościom zmiennej  $\omega$ . Jej początek, to  $K(0)$ , na rysunku wartość ta jest dodatnia.



Rys. 8.1: Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej. Początek, to  $K(0)$ ; strzałka wskazuje wzrost wartości  $\omega$ .

### 8.2 Charakterystyki logarytmiczne

Charakterystyki logarytmiczne przedstawione są na rys. 8.2. Na obu oś  $\omega$  ma logarytmiczną skalę dekadową. Amplitudowa pokazuje  $20 \log |K(j\omega)|$ , przy czym jednostką wzmocnienia jest decybel, w skrócie dB. Zatem np. wzmocnienie



Rys. 8.2: Przykład charakterystyk logarytmicznych. Amplitudowa po lewej i fazowa po prawej.

100, to 40dB, bowiem  $20\log 100 = 40$ . Charakterystyka fazowa przedstawia natomiast  $\arg K(j\omega)$ .

Charakterystyki połączenia szeregowego systemów są sumami ich charakterystyk, bowiem

$$20\log|K(j\omega)G(j\omega)| = 20\log|K(j\omega)| + 20\log|G(j\omega)|,$$

$$\arg K(j\omega)G(j\omega) = \arg K(j\omega) + \arg G(j\omega).$$

## 9 Reakcja systemu na standardowe pobudzenia

Omówimy teraz reakcję systemu na obudzenia standardowe w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy. Pobudzenia te, to:

- impuls Diraca  $\delta(t)$ ,
- skok jednostkowy  $1(t)$ ,
- sinusoida  $\sin\omega t$ .

### 9.1 Odpowiedź impulsowa

Reakcja  $y(t)$  na pobudzenie  $u(t) = \delta(t)$  nazywa się odpowiedzią impulsową. Jest oczywiste, że przy takim pobudzeniu  $Y(s) = K(s)$ , bowiem  $U(s) = 1$ . Zatem  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\} = k(t)$  (pamiętamy o konwencji oznaczania oryginału i transformaty odpowiednio małą i wielką literą). Odpowiedzią impulsową jest zatem

$$k(t) \hat{=} K(s),$$

czyli funkcja oryginalna wobec transmitancji.

Z uwagi na (4.5) i (4.5), możemy napisać  $M(s) = a_m(s-s_1)\cdots(s-s_m)$ . Jeśli zatem  $l \leq m$ , to rozkład na ułamki proste ma postać jak poniżej:

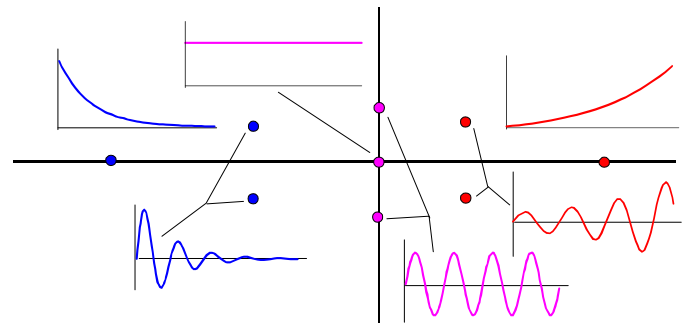
$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{s-s_1} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s-s_m},$$

przy czym  $\alpha_0 = 0$  dla  $l < m$ . Założyliśmy przy tym dla uproszczenia, że wszystkie bieguny transmitancji, czyli pierwiastki charakterystyczne, są jednokrotne. W rezultacie

$$k(t) = \alpha_0\delta(t) + \alpha_1 e^{-s_1 t} + \cdots + \alpha_m e^{-s_m t}. \quad (9.1)$$

Każdy biegun wnosi więc do odpowiedzi impulsowej własny wkład. Dla wygody będziemy mówić o składowej pochodzącej od bieguna rzeczywistego i składowej pochodzącej od pary biegunów zespolonych. Kształt każdej zależy od położenia stosownych biegunów na płaszczyźnie liczb zespolonych, rys. 9.1.

Pochodząca od bieguna rzeczywistego, oznaczmy go przez  $\sigma$ , ma kształt  $e^{\sigma t}$  i jest aperiodyczna. Dla  $\sigma < 0$  zanika wraz z czasem, dla  $\sigma = 0$  jest ona stała, dla  $\sigma > 0$  narasta do nieskończoności.



Rys. 9.1: Bieguny transmitancji i składowe odpowiedzi impulsowej.

Z kolei para biegunów zespolonych<sup>2</sup>, oznaczmy ją jako  $(s_1 = \sigma + j\omega, s_2 = \sigma - j\omega)$ , wnosi składową periodyczną typu  $e^{\sigma t} \sin\omega t$ . Dla  $\sigma < 0$  suma ta zanika, dla  $\sigma = 0$  jest ona sinusoidą o stałej amplitudzie, dla  $\sigma > 0$  narasta.

Jeśli natomiast biegun lub ich para są dwukrotne, to pojawia się odpowiednio składowa  $te^{\sigma t}$  lub  $te^{\sigma t} \sin\omega t$ . Ich omawiana własność, tzn. zanikanie, ograniczoność, lub narastanie, zależy od  $\sigma$  w podobny sposób jak dla pary jednokrotnej.

Z powyższego wynika zatem, że jeśli wszystkie bieguny transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie, tzn. jeśli bieguny rzeczywiste są ujemne a zespolone mają ujemne części rzeczywiste (systemy takie będziemy nazywać stabilnymi), to  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$ .

### 9.2 Odpowiedź skokowa

Odpowiedź skokowa oznaczona jako  $\lambda(t)$ , to reakcja systemu na skok jednostkowy  $u(t) = 1(t)$ . Ponieważ  $U(s) = 1/s$ , zatem

$$\lambda(t) \hat{=} \frac{1}{s}K(s).$$

Z uwagi na liniowość systemu, jest oczywiste, że

$$\lambda(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau \quad \text{oraz} \quad k(t) = \frac{d}{dt}\lambda(t).$$

Ponieważ  $\lambda(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau$ , zatem z (9.1) i liniowości systemu wynika

$$\lambda(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \int_0^t e^{-s_1 \tau} d\tau + \cdots + \alpha_m \int_0^t e^{-s_m \tau} d\tau, \quad (9.2)$$

co oznacza, że każdy biegun rzeczywisty i każda para biegunów zespolonych wnosi odpowiednio swoją składową, rys. 9.2, a ponadto pojawia się wyraz  $\alpha_0$ .

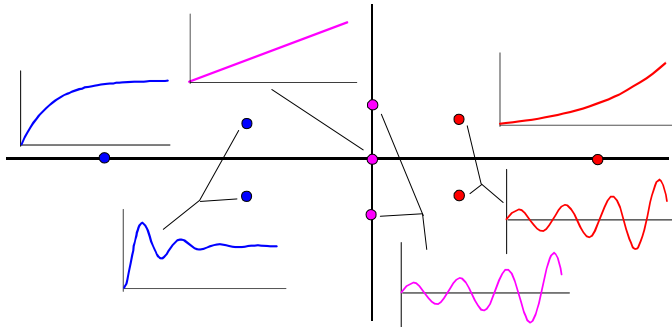
Dla rzeczywistego jest ona proporcjonalna do  $\int_0^t e^{\sigma \tau} d\tau$ , czyli funkcji typu  $1 - e^{\sigma t}$ , oznaczenia biegunów jak w § 9.1. Składowa pochodząca od pary biegunów sprzężonych<sup>3</sup> jest periodyczna i ma kształt jak  $1 - e^{\sigma t} \cos\omega t$ . Dla  $\sigma < 0$  zatem składowa ta ustala się, bowiem  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sigma t} = 0$ .

Jeśli zatem wszystkie rzeczywiste bieguny transmitancji systemu są ujemne a części rzeczywiste zespolonych także (które to systemy nazywamy stabilnymi, patrz § 9.1), to granica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$  istnieje, odpowiedź skokowa ustala się. Z twierdzenia granicznego wynika ponadto, że jest ona

<sup>2</sup>patrz 1. TRANSFORMACJA LAPLACE' A, Przykład 4.6.

<sup>3</sup>patrz 1. TRANSFORMACJA LAPLACE' A, Przykład 4.7.





Rys. 9.2: Biegunki transmitancji i składowe odpowiedzi skokowej.

równa  $K(0)$ , którą to wartość nazywamy współczynnikiem wzmocnienia w stanie ustalonym.

Jeśli natomiast  $\sigma \geq 0$ , czy to dla bieguna rzeczywistego czy dla pary biegunów sprzężonych, odpowiednia składowa odpowiedzi narasta do nieskończoności, aperiodycznie w pierwszym przypadku i oscylacyjnie w drugim przypadku.

Ustalimy teraz własności odpowiedzi skokowej w punkcie  $t = 0$ .

**Własność 9.1** W systemie (5.1) jest tak, że

$$\lambda(0) = \lambda^{(1)}(0) = \dots = \lambda^{(p-1)}(0) = 0$$

i dopiero  $\lambda^{(p)}(0) = \frac{b_l}{a_m}$ ,

gdzie  $p = m - l \geq 1$ .

**Dowód.** Z uwagi na liniowość systemu, jest oczywiste, że dla dowolnego  $q$

$$\lambda^{(q)}(t) \hat{=} s^q \mathfrak{L}\{\lambda(t)\} = s^q \frac{1}{s} K(s) = s^{q-1} K(s) = \frac{s^{q-1} L(s)}{M(s)}.$$

Dla  $q \leq p$  oryginał tego wyrażenia ma zatem postać jak w (9.2). Dla  $q < p$  jest przy tym tak, że  $\alpha_0 = 0$ , ponieważ w wyrażeniu tym stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy niż w mianowniku. Zatem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^{(q)}(t) = 0.$$

Dla  $q = p$ , z twierdzenia granicznego wynika, że

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^{(p)}(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathfrak{L}\{\lambda^{(p)}(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^{p-1} L(s)}{M(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^p L(s)}{M(s)} = \frac{b_l}{a_m}. \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że ponadto funkcja  $\lambda^{(p)}(t)$  jest ciągła w punkcie  $t = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^{(p)}(t) = \lambda^{(p)}(0)$ , co kończy dowód.  $\square$

Ustaliliśmy zatem, że im większa różnica  $p = m - l$  pomiędzy stopniami wielomianów w mianowniku i liczniku transmitancji tym wolniejsza reakcja systemu, tym większa inercja.

### 9.3 Odpowiedź na sinusoidę

Reakcja systemu na wymuszenie sinusoidalne powiązana jest z transmitancją widmową. Jeśli bowiem

$$u(t) = \sin \omega t,$$

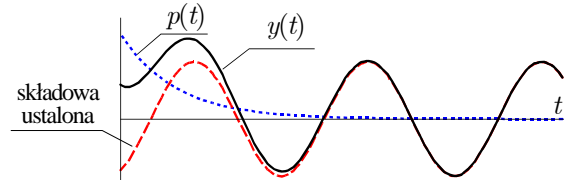
to

$$y(t) = |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + p(t),$$

przy czym  $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$  oraz  $p(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Q(s)/M(s)\}$ , gdzie  $Q(s)$  jest pewnym wielomianem, patrz Własność 9.2. Odpowiedź systemu zawiera zatem dwie składowe, rys. 9.3: ustaloną

$$|K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (9.3)$$

i przejściową  $p(t)$ .



Rys. 9.3: Odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne.

Pierwsza jest sinusoidą o takiej samej częstotliwości jak pobudzenie (mówimy, że system nie wprowadza zniekształcenia częstotliwościowego) wzmocnioną  $|K(j\omega)|$  razy i przesuniętą o  $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$ . Zarówno wzmocnienie jak i przesunięcie fazowe zależą od częstotliwości. Druga składowa, czyli  $p(t)$ , zanika dla systemów stabilnych, patrz § 9.1.

**Przykład 9.1** Aby wyznaczyć reakcję systemu o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{s - a}$$

na pobudzenie  $u(t) = \sin \omega t$  przy zerowym warunku początkowym, dokonujemy rozkładu na ułamki proste:

$$\begin{aligned} K(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} &= \frac{\omega}{(s - a)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \left( -\frac{s + a}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s - a} \right) \end{aligned}$$

i wnioskujemy, że jest ona równa

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} e^{at},$$

gdzie  $\phi = \arcsin(\omega/\sqrt{a^2 + \omega^2})$ . Dla  $a < 0$  druga składowa odpowiedzi zanika, gdy czas narasta.

**Własność 9.2** Jeśli  $u(t) = \sin \omega t$ , to

$$y(t) = |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + p(t),$$

gdzie  $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$ ,  $p(t) \hat{=} Q(s)/M(s)$ , przy czym  $Q(s)$  jest pewnym wielomianem.

**Dowód.** Ponieważ  $U(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$ , zatem

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} K(s) = \frac{\omega L(s)}{(s^2 + \omega^2) M(s)}.$$

Wyrażenie to można rozłożyć na ułamki jak poniżej:

$$\frac{\omega L(s)}{(s^2 + \omega^2) M(s)} = \frac{as + b}{s^2 + \omega^2} + \frac{Q(s)}{M(s)},$$

gdzie  $Q(s)$  jest pewnym wielomianem. Z rozkładu tego wynika:  $\omega L(s) = (as + b)M(s) + (s^2 + \omega^2)Q(s)$ .

Podstawiając zatem kolejno  $s = j\omega$  i  $s = -j\omega$ , otrzymujemy  $\omega L(j\omega) = (b + j\omega)M(j\omega)$  i  $\omega L(-j\omega) = (b - j\omega)M(-j\omega)$ , co prowadzi do wniosku, że  $\omega K(j\omega) = b + j\omega$  i  $\omega K(-j\omega) = b - j\omega$ . W rezultacie  $b = \omega \operatorname{Re} K(j\omega)$  i  $a = \operatorname{Im} K(j\omega)$ , bowiem  $K(-j\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega) - j \operatorname{Im} K(j\omega)$ . Zatem

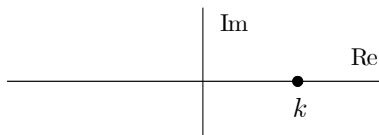
$$\begin{aligned} \frac{as + b}{s^2 + \omega^2} &= \frac{s \operatorname{Im} K(j\omega) + \omega \operatorname{Re} K(j\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &= |K(j\omega)| \frac{s \sin \varphi(\omega) + \omega \cos \varphi(\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &\doteq |K(j\omega)| (\cos \omega t \sin \varphi(\omega) + \sin \omega t \cos \varphi(\omega)) \\ &= |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)), \end{aligned}$$

gdzie  $\sin \varphi(\omega) = \operatorname{Im} K(j\omega)/|K(j\omega)|$  oraz  $\cos \varphi(\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega)/|K(j\omega)|$ , co oznacza, że  $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$ .  $\square$

## 10 Systemy elementarne

### 10.1 Element proporcjonalny

Element o wzmacnieniu  $k$  ma transmitancję  $K(s) = k$ . Jego transmitancja widmowa, to  $K(j\omega) = k$ . Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest punktem, rys. 10.1.



Rys. 10.1: Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu proporcjonalnego;  $k > 0$ .

### 10.2 Element inercyjny

Transmitancja systemu inercyjnego

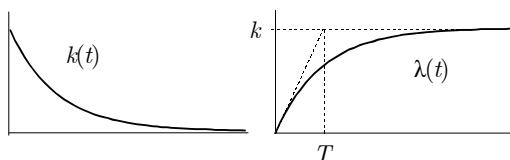
$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1},$$

$T > 0$ , ma biegun rzeczywisty  $-1/T$ . Odpowiedzi, to

$$k(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T},$$

$$\lambda(t) = k \left(1 - e^{-t/T}\right),$$

rys. 10.2. Zauważmy, że  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda'(0) = k/T > 0$ . Zatem im większa stała czasowa  $T$ , tym mniejsza wartość  $\lambda'(0) = k/T$ , czyli wolniejsza reakcja tzn. większa inercja.

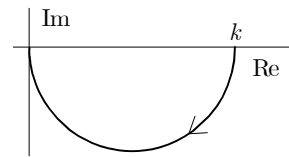


Rys. 10.2: Odpowiedzi systemu inercyjnego. Styczna odpowiedzi skokowej w punkcie  $t = 0$  osiąga wartość  $k$  dla  $t = T$ .

Transmitancja widmowa, to

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{k}{1 + j\omega T} \\ &= \frac{k}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{k\omega T}{1 + (\omega T)^2}. \end{aligned}$$

Charakterystykę amplitudowo-fazową, która jest półokręgiem, przedstawia rys. 10.3.



Rys. 10.3: Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu inercyjnego.

**Przykład 10.1** Ciało o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły  $F$ . Jeśli opór powietrza jest proporcjonalny do prędkości, to - na mocy drugiej zasady Newtona -

$$mv'(t) + av(t) = F(t),$$

gdzie  $v(t)$  jest prędkością, a  $av(t)$  siłą oporu. System o wejściu  $F$  i wyjściu  $v$  jest zatem inercyjny.

### 10.3 Element inercyjny drugiego rzędu

Transmitancja elementu inercyjnego drugiego rzędu

$$K(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

$T_1, T_2 > 0$ , ma dwa bieguny rzeczywiste. Dla  $T_1 \neq T_2$

$$k(t) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left( e^{t/T_1} - e^{t/T_2} \right),$$

$$\lambda(t) = k \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{t/T_2} \right),$$

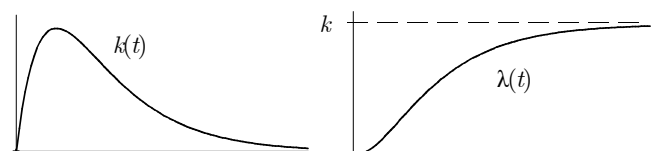
dla  $T_1 = T_2 = T$ , natomiast

$$k(t) = \frac{k}{T^2} t e^{-t/T},$$

$$\lambda(t) = k \left( 1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T},$$

rys. 10.4. System taki można traktować jak szeregowe połączenie dwóch elementów inercyjnych pierwszego rzędu. Jak łatwo wyliczyć,  $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ , a ponadto  $\lambda''(0) = k/T_1 T_2 > 0$ . Reakcja jest zatem jakościowo wolniejsza niż w systemie inercyjnym pierwszego rzędu, dla którego  $\lambda'(0) > 0$ .

Charakterystyka amplitudowo-fazowa pokazana jest na rys. 10.5.

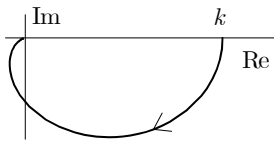


Rys. 10.4: Odpowiedzi systemu inercyjnego drugiego rzędu.

**Przykład 10.2** W sytuacji jak w Przykładzie 10.1 poruszające się ciało rozciąga dodatkowo sprężynę o współczynniku sprężystości  $k$ . Równanie opisujące ruch ciała ma postać

$$m\xi''(t) + a\xi'(t) + k\xi(t) = F(t),$$

gdzie  $\xi(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$  jest drogą przebytą przez to ciało. Jeśli  $a^2 - 4mk \geq 0$ , to bieguny jego transmitancji  $1/(ms^2 + as + k)$  są rzeczywiste i mówimy o systemie inercyjnym drugiego rzędu o wejściu  $F$  i wyjściu  $\xi$ .



Rys. 10.5: Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu inercyjnego drugiego rzędu.

#### 10.4 Element oscylacyjny

System o transmitancji

$$K(s) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

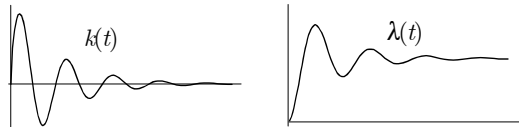
nazywany oscylacyjnym ma parę biegunów zespolonych  $\sigma + j\omega$  oraz  $\sigma - j\omega$ . Dla systemu tego

$$k(t) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t,$$

$$\lambda(t) = 1 - B e^{\sigma t} \cos(\omega t - \varphi),$$

przy czym  $B = \omega / \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ ,  $\cos \varphi = B$ , rys. 10.6. Obie odpowiedzi elementu mają zatem charakter oscylacyjny, stąd jego nazwa. Podobnie jak dla elementu inercyjnego drugiego rzędu  $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$  oraz  $\lambda''(0) = \sigma^2 + \omega^2 > 0$ .

Charakterystyka amplitudowo-fazowa ma kształt jak na rys. 10.5.



Rys. 10.6: Odpowiedzi elementu oscylacyjnego.

**Przykład 10.3** Jeśli w Przykładzie 10.2 jest tak, że  $a^2 - 4mk < 0$ , to system jest oscylacyjny. Ruch ciała ma charakter drgający.

**Uwaga 10.1** System o transmitancji

$$\frac{1}{s^2 + as + b}$$

jest inercyjny drugiego rzędu, jeśli  $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$ , bowiem bieguny transmitancji są rzeczywiste. Jeśli  $\Delta < 0$ , to bieguny są zespolone; system jest oscylacyjny.

#### 10.5 Element całkujący

Element o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{s}$$

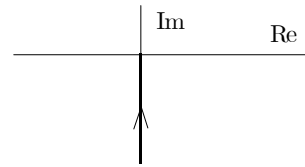
nazywamy całkującym. Jego odpowiedzi, to

$$k(t) = 1(t) \quad \text{oraz} \quad \lambda(t) = t.$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa, czyli wykres funkcji

$$K(j\omega) = -j \frac{1}{\omega},$$

pokazana jest na rys. 10.7.



Rys. 10.7: Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu całkującego.

#### 10.6 Element całkujący z inercją

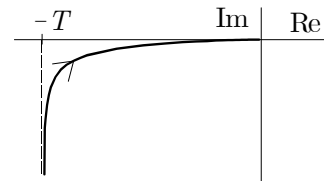
Połączenie całkowania z inercją, to system o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{s(sT + 1)},$$

którego odpowiedzią impulsową jest

$$k(t) = 1 - e^{-t/T}.$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa pokazana jest na rys. 10.8. Ma ona pionową asymptotę.

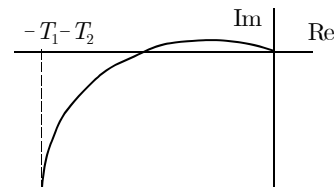


Rys. 10.8: Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu całkującego z inercją.

Charakterystykę elementu z inercją drugiego rzędu o transmitancji

$$\frac{1}{s(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)}$$

przedstawia rys. 10.9.



Rys. 10.9: Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu całkującego z inercją drugiego rzędu.

## 11 Podsumowanie

Najpełniejszym opisem systemu jest równanie różniczkowe. Posługując się nim możemy wyznaczyć reakcję systemu na dowolne pobudzenie przy dowolnych warunkach początkowych.

Transmitancja i spłot wiążą sygnały na wejściu i wyjściu jedynie w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy. Przy takim warunku system zachowuje się w sposób liniowy, liniowym operacjom na sygnale wejściowym odpowiadają takie same operacje na sygnale wyjściowym.

Inne typy opisu, to reakcje na standardowe pobudzenia, gdy warunek początkowy także jest zerowy. Dwie z nich, to odpowiedź impulsowa i skokowa, ta pierwsza powiązana jest ze spłotem. Trzecia, to reakcja na pobudzenie sinusoidalne. Pozostaje natomiast w silnym związku z transmitancją widmową. Jej różne reprezentacje graficzne nazywają się charakterystykami częstotliwościowymi.