

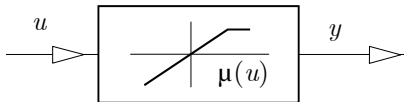
## 1 Wstęp

Metoda funkcji opisującej służy do badania stabilności pewnego typu nieliniowych układów automatycznej regulacji. W układach tych obiekt jest dynamiczny i liniowy, natomiast regulator jest statyczny i nieliniowy. Metoda ta wykorzystuje ideę rozwinąć funkcji periodycznej w szereg trygonometryczny, czyli Fouriera.

## 2 Funkcja opisująca elementu nieliniowego

### 2.1 Szereg trygonometryczny

Załóżmy, że statyczny element nieliniowy o wejściu  $u$  i wyjściu  $y$  ma charakterystykę  $\mu(u)$ , rys. 2.1.



Rys. 2.1: Element nieliniowy o charakterystyce  $\mu(u)$ .

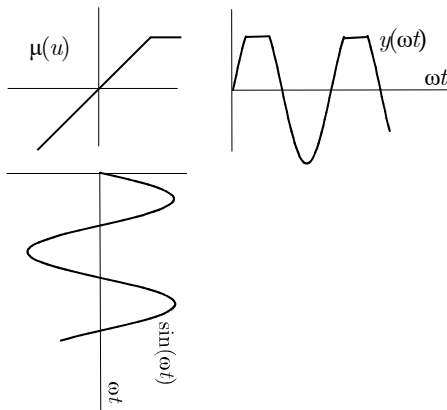
Jeśli zatem

$$u(t) = A \sin(\omega t), \quad (2.1)$$

to

$$y(t) = \mu(A \sin(\omega t)) \quad (2.2)$$

jest sygnałem periodycznym, patrz rys. 2.2.



Rys. 2.2: Sygnały  $u(t)$  i  $y(t)$  elementu nieliniowego o charakterystyce  $\mu(u)$ .

Jego rozwinięciem w szereg Fouriera jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t) + \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega t),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \sin(n\omega t) d(\omega t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) d(\omega t),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \cos(n\omega t) d(\omega t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

**Uwaga 2.1** Jeżeli  $\mu(u)$  jest funkcją nieparzystą, to taką jest także  $y(t)$  i w rezultacie  $b_0 = b_1 = \dots = 0$ .

**Uwaga 2.2** Skończony szereg

$$s_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\omega t) + \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^N b_n \cos(n\omega t)$$

jest przybliżeniem funkcji  $y(t)$ . Błąd tego przybliżenia, czyli  $\int_0^{2\pi} (s_N(\omega t) - y(\omega t))^2 d(\omega t)$ , maleje do zera, gdy  $N \rightarrow \infty$ , o ile  $\int_0^{2\pi} y^2(\omega t) d(\omega t) < \infty$ .

### 2.2 Definicja funkcji opisującej

Definiujemy teraz nowy element nieliniowy, rys. 2.3. Przy pobudzeniu sygnałem sinusoidalnym (2.1) na jego wyjściu pojawia się

$$w(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t),$$

gdzie

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t),$$

$$b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t),$$

czyli jedynie pierwsza harmoniczna sygnału  $y(t)$  w (2.2), czyli ta, dla której  $n = 1$ , bowiem  $a = a_1$ ,  $b = b_1$ , patrz (2.3) i (2.4).

Przy tym szczególnym pobudzeniu zachowuje się on pod pewnym względem jak system liniowy, gdyż jego sygnał wyjściowy nie zawiera wyższych harmonicznych, czyli  $\sin(2\omega t)$ ,  $\cos(2\omega t)$ ,  $\sin(3\omega t)$ ,  $\cos(3\omega t)$  itd.

Jest oczywiste, że

$$U(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

oraz

$$W(s) = a \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + b \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

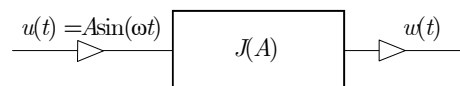
Zatem

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{a}{A} + \frac{b}{A\omega} s,$$

skąd wynika, że

$$\left. \frac{W(s)}{U(s)} \right|_{s=j\omega} = \frac{a}{A} + j \frac{b}{A},$$

co jest podstawą dla definicji funkcji opisującej.



Rys. 2.3: Element nieliniowy o funkcji opisującej  $J(A)$ .

**Definicja 2.1 (funkcja opisująca)** Funkcją opisującą elementu  $\mu(\cdot)$  nazywamy

$$J(A) = \frac{a}{A} + j \frac{b}{A}.$$

Jeśli charakterystyka elementu nieliniowego  $\mu(\cdot)$  jest funkcją nieparzystą (tzn. jeśli  $\mu(-u) = -\mu(u)$  dla wszystkich  $u$ ), to  $y(t)$  także. W rezultacie  $b_n = 0$  dla wszystkich  $n$ . Wówczas  $J(A) = a_1/A$ .

Funkcja opisująca  $J(A)$  jest jedynie przybliżeniem nieliniowego elementu o charakterystyce  $\mu(u)$  przedstawionego na rys. 2.1. Jest ona natomiast dokładna wobec elementu pokazanego na rys. 2.3, pod warunkiem jednak że pobudzenie jest sinusoidą.

Zauważmy na koniec, że definicja funkcji opisującej w oczywisty sposób nawiązuje do pojęcia transmitancji widmowej.

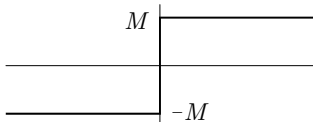
### 3 Funkcje opisujące wybranych elementów nieliniowych

Wyznamy teraz funkcje opisujące kilku elementów nieliniowych.

#### 3.1 Przekaznik dwupołożeniowy

Charakterystyka przekaznika dwupołożeniowego, patrz rys. 3.1, wyraża się wzorem:

$$\mu(u) = \begin{cases} -M, & \text{dla } u < 0 \\ M, & \text{dla } u \geq 0. \end{cases}$$



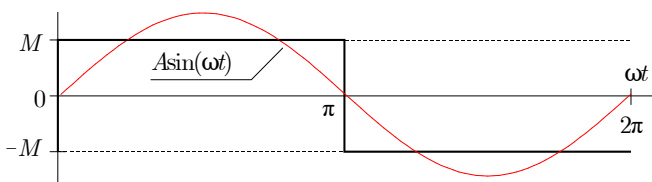
Rys. 3.1: Charakterystyka przekaznika dwupołożeniowego.

Jego sygnał wyjściowy, przy pobudzeniu sinusoidalnym, pokazany jest na rys. 3.2. Jest on falą prostokątną o amplitudzie  $M$ . Ponieważ jest ona funkcją nieparzystą, zatem  $b = 0$ , patrz Uwaga 2.1, natomiast

$$a = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{4M}{\pi}.$$

W rezultacie

$$J(A) = \frac{4M}{\pi A}. \quad (3.1)$$



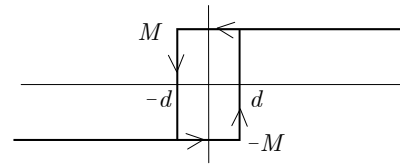
Rys. 3.2: Pobudzenie sinusoidalne i wyjście przekaznika dwupołożeniowego.

#### 3.2 Przekaznik z dwupołożeniowy z histerezą

Przekaznik dwupołożeniowy z histerezą ma charakterystykę jak na rys. 3.3. Jego sygnał wyjściowy pokazują natomiast rys. 3.4.

Zatem

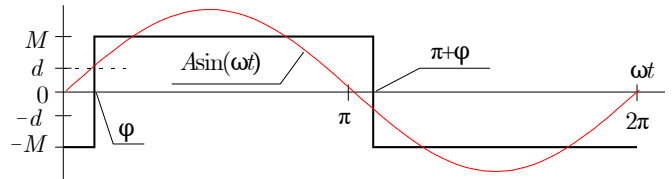
$$\begin{aligned} a &= \frac{2M}{\pi} \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} \sin t dt \\ &= \frac{4M}{\pi} \cos \varphi = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}, \end{aligned}$$



Rys. 3.3: Charakterystyka przekaznika dwupołożeniowego z histerezą

ponieważ  $A \sin \varphi = d$ . Podobnie  $b = -(4M/\pi) \sin \varphi = -(4M/\pi)(d/A)$ . W rezultacie

$$J(A) = \frac{4M}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} - j \frac{d}{A} \right).$$

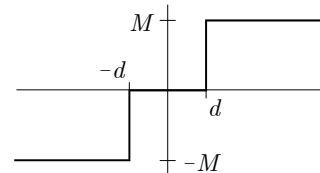


Rys. 3.4: Pobudzenie sinusoidalne i wyjście przekaznika dwupołożeniowego z histerezą;  $A \sin \varphi = d$ ,  $A \sin(\pi + \varphi) = -d$ .

#### 3.3 Przekaznik trójpokożeniowy

Charakterystyką przekaznika trójpokożeniowego, rys. 3.5, jest:

$$\mu(u) = \begin{cases} -M, & \text{dla } u \leq -d \\ 0, & \text{dla } -d < u < d \\ M, & \text{dla } u \geq d. \end{cases}$$



Rys. 3.5: Charakterystyka przekaznika trójpokożeniowego.

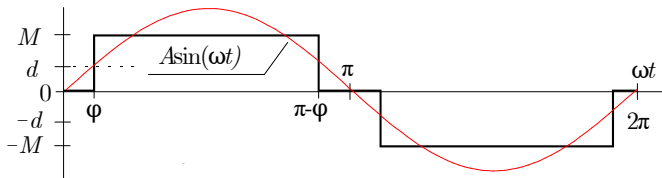
Jego wyjście pokazane jest na rys. 3.6. Jest oczywiste, że  $b = 0$ . Ponadto, dla  $A < d$  mamy  $a = 0$ . Dla  $A \geq d$ , natomiast

$$\begin{aligned} a &= \frac{2M}{\pi} \int_{\varphi}^{\pi-\varphi} \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} \int_{\varphi}^{\pi-\varphi} \sin \tau d\tau \\ &= \frac{4M}{\pi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

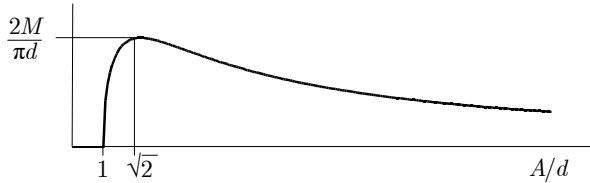
przy czym  $\varphi$  jest takie, że  $A \sin \varphi = d$ , co oznacza, że  $\cos \varphi = \sqrt{1 - (d/A)^2}$ . W rezultacie  $a = (4M/\pi) \sqrt{1 - (d^2/A^2)}$ . Ostatecznie

$$J(A) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leq A \leq d, \\ \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}, & \text{dla } A > d. \end{cases}$$

Jak można wyliczyć  $\max_A J(A) = 2M/\pi d$ , która to wartość jest osiągana dla  $A = \sqrt{2}d$ , patrz rys. 3.7. Zauważmy, że dla  $d = 0$  mamy do czynienia z przekaznikiem dwupołożeniowym o funkcji opisującej (3.1).



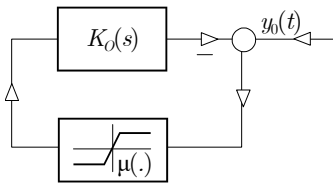
Rys. 3.6: Pobudzenie sinusoidalne i wyjście przełącznika trójpołożeniowego;  $A \sin \varphi = A \sin(\pi - \varphi) = d$ .



Rys. 3.7: Wykres funkcji  $J(A/d)$  przełącznika trójpołożeniowego.

#### 4 Automatyczna regulacja

Zajmiemy się teraz układem automatycznej regulacji, w którym regulator jest statycznym elementem nieliniowym o charakterystyce  $\mu(\cdot)$ , patrz rys. 4.1. Interesować nas będzie to, czy w stanie ustalonym wystąpią w nim oscylacje.



Rys. 4.1: Układ automatycznej regulacji z regulatorem o charakterystyce  $\mu(\varepsilon)$ .

Analizie poddamy układ, w którym rzeczywisty nieliniowy regulator zastąpiono elementem o funkcji opisującej  $J(A)$ , czyli jego przybliżeniem, patrz rys. 4.2. Za względu na to przybliżenie wnioski odniesione do rzeczywistego układu mogą być obciążone błędami. Zakładamy przy tym, że  $y_0(t) \equiv 0$  dla  $t \geq 0$ .

Jeśli zatem w systemie mają miejsce drgania sinusoidalne, tzn. jest tak, że

$$\varepsilon(t) = A \sin(\omega t), \quad (4.1)$$

to, na mocy definicji funkcji opisującej,

$$\left. \frac{W(s)}{E(s)} \right|_{s=j\omega} = J(A).$$

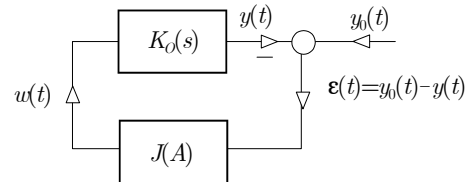
Ponieważ  $E(s) = -K_O(s)W(s)$ , a więc

$$\left. \frac{W(s)}{E(s)} \right|_{s=j\omega} = \frac{1}{-K_O(s)} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{1}{K_O(j\omega)}.$$

Porównując prawe strony otrzymanych wyrażeń dochodzimy do wniosku, że parametry drgań (4.1) są rozwiązaniem równania

$$J(A)K_O(j\omega) = -1.$$

Jeśli zatem rozwiązaniem tego równania jest np. para  $(A^*, \omega^*)$ , to  $\varepsilon(t) = A^* \sin(\omega^* t)$ . Należy zaznaczyć, że, jak później zobaczymy, równanie to może nie mieć rozwiązania, może mieć jedno albo więcej.



Rys. 4.2: Układ automatycznej regulacji z regulatorem o funkcji opisującej  $J(A)$ .

**Wniosek 4.1** Warunkiem wystąpienia drgań jest istnienie rozwiązania równania

$$K_O(j\omega) = -\frac{1}{J(A)}. \quad (4.2)$$

### 5 Przykłady układów automatycznej regulacji

#### 5.1 Przełącznik dwupołożeniowy

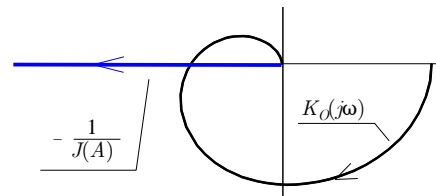
Obiekt inercyjny trzeciego rzędu ma transmitancję

$$K_O(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

natomiast regulator jest dwupołożeniowy. Na rys. 5.1 przedstawiono wykres jego charakterystyki amplitudowo-fazowej i funkcji

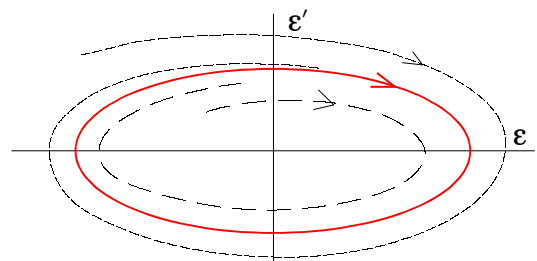
$$-\frac{1}{J(A)} = -\frac{\pi A}{4M}$$

przełącznika.



Rys. 5.1: Przełącznik dwupołożeniowy, Wykres  $K(j\omega)$  i  $1/J(A)$ .

Strzałki pokazują odpowiednio kierunek wzrostu  $A$  i  $\omega$ . Punkt ich przecięcia wyznacza parametry drgań  $(A^*, \omega^*)$ . Częstotliwość odczytuje się z wykresu  $K(j\omega)$ , amplitudę z wykresu  $-1/J(A)$ .



Rys. 5.2: Przełącznik dwupołożeniowy, trajektorie sygnału  $\varepsilon(t)$  na płaszczyźnie  $(\varepsilon, \varepsilon')$ .

Drgania o amplitudzie mniejszej niż  $A^*$  będą narastać, bowiem dla  $A < A^*$  zachodzi nierówność  $-1/J(A^*) < -1/J(A)$ , co oznacza, że wykres  $K(j\omega)$  obejmuje punkt  $-1/J(A)$  (patrz kryterium Nyquista). Na tej samej zasadzie, drgania o większej amplitudzie będą maleć, bowiem

dla  $A > A^*$  wykres  $K(j\omega)$  nie obejmuje punktu  $-1/J(A)$ . Zatem wyznaczony cykl drgań  $(A^*, \omega^*)$  jest stabilny, co ilustruje rys. 5.2.

### 5.2 Przekładnik dwupołożeniowy z histerezą

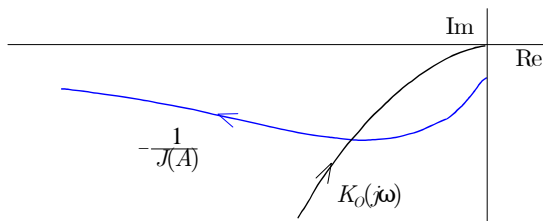
Obiekt całkujący z inercją ma transmitancję

$$K_O(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)},$$

natomiast regulator dwupołożeniowy ma histerezą. Wykresy  $K_O(j\omega)$  i

$$-\frac{1}{J(A)} = \frac{-\pi A}{4M} \left( \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} + j \frac{d}{A} \right)$$

przedstawione są na rys. 5.3. Miejsce przecięcia wykresów wyznacza parametry  $(A^*, \omega^*)$  drgań sygnału  $\varepsilon(t)$ . Wykres trajektorii jest podobny do przedstawionego na rys. 5.2. Cykl graniczny jest stabilny.



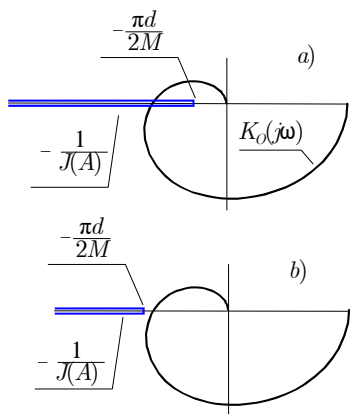
Rys. 5.3: Przekładnik dwupołożeniowy z histerezą. Wykres  $K(j\omega)$  i  $-1/J(A)$ .

### 5.3 Przekładnik trójpołożeniowy

Obiekt inercyjny trzeciego rzędu ma transmitancję

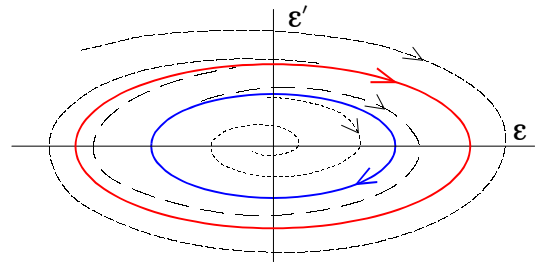
$$K_O(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)},$$

natomiast regulator jest trójpołożeniowy. Rys. 5.4 przedstawia wykresy  $K_O(j\omega)$  i  $-1/J(A)$ . Ten drugi jest niejako podwójny, patrz rys. 3.7.



Rys. 5.4: Przekładnik trójpołożeniowy. Wykres  $K(j\omega)$  i  $-1/J(A)$ .

W sytuacji a) równanie (4.2) ma dwa rozwiązania:  $(A_1, \omega^*)$  i  $(A_2, \omega^*)$ . Możliwe są zatem dwa cykle drgań, a mianowicie  $\varepsilon_1(t) = A_1 \sin(\omega^*t)$  oraz  $\varepsilon_2(t) = A_2 \sin(\omega^*t)$ ,

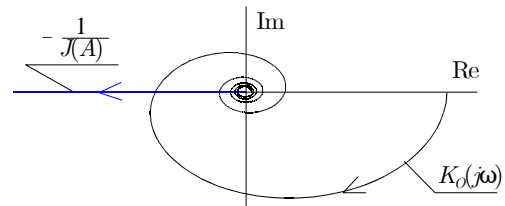


Rys. 5.5: Przekładnik trójpołożeniowy. Trajektorie sygnału  $\varepsilon(t)$ .

patrz rys. 5.5. W sytuacji b) drgań nie ma. Na zasadzie jak w przykładzie z przekładnikiem dwupołożeniowym, cykl o większej amplitudzie jest stabilny, natomiast ten o mniejszej jest niestabilny.

## 6 Obiekt z opóźnieniem

Obiekt ma transmitancję  $K_O(s) = ke^{-\tau s}(Ts + 1)$ , czyli jest inercyjny z opóźnieniem  $\tau$ , natomiast regulator jest dwupołożeniowy. Równanie (4.2), rys. 6.1, ma wiele rozwiązań, co oznacza, że istnieje wiele cykli granicznych. Ten o największej amplitudzie jest stabilny, pozostałe są niestabilne.



Rys. 6.1: Obiekt z opóźnieniem, przekładnik dwupołożeniowy. Wykres  $K(j\omega)$  i  $-1/J(A)$ .

## 7 Zakończenie

Na koniec należy przypomnieć, że przedstawiona analiza ma charakter przybliżony. Wnioski dotyczące wystąpienia drgań i wyznaczone parametry drgań są bowiem obciążone błędami wynikającymi z poczynionych przybliżeń.