1 Sygnał dyskretny

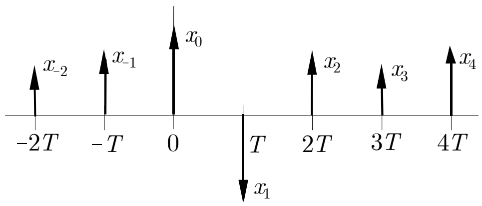
Sygnałem dyskretnym jest ciąg impulsów Diraca, rys. 1.1, czyli

$$\ldots, x_{-1}\delta(t+T), x_0\delta(t), x_1\delta(t-T), x_2\delta(t-2T), \ldots.$$

Inna interpretacja takiego sygnału, to ciąg liczbowy

$$\{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

który będziemy oznaczać jako $\{x_n\}$ lub krótko x_n. Sygnał będziemy zatem, w zależności od kontekstu, traktować jako ciąg impulsów Diraca albo jako ciąg liczbowy.

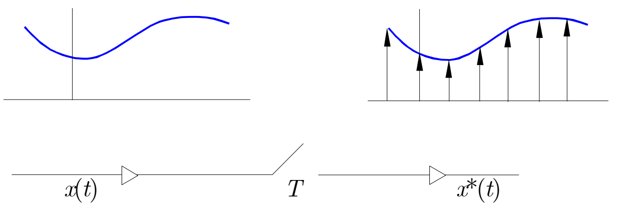


Rys. 1.1: Sygnał dyskretny, ciąg impulsów Diraca.

Sygnał dyskretny powstaje niekiedy przez operację tzw. próbkowania sygnału ciągłego, którą to operację wykonuje urządzenie nazywane impulsatorem. Wejściem impulsatora, rys. 1.2, jest zatem ciągły sygnał $x(t)$, natomiast wyjściem

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT). \tag{1.1}$$

Zamienia więc on funkcję czasu w ciąg impulsów Diraca modulowanych przez jej wartości w chwilach $\ldots, -T, 0, T, 2T, 3T, \ldots$. Liczba T nazywa się okresem impulsowania.



Rys. 1.2: Impulsator.

2 Transformata $\mathcal{Z}$

2.1 Definicja i własności

Sygnał dyskretny można poddać transformacji $\mathcal{Z}$ zdefiniowanej jak poniżej:

Definicja 2.1 *Funkcję $X(z)$ zdefiniowaną wzorem*

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2^{z-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \tag{2.1}$$

nazywa się transformatą $\mathcal{Z}$ ciągu liczbowego $\{x_n\}$.

Zauważmy, że wyrazy $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$, czyli wyrazy o ujemnych indeksach nie mają wpływu na wynik transformacji.

Będziemy także pisać $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ oraz $\{x_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$. Następna konwencja, to oznaczanie przez np. $X(z)$, $G(z)$ transformat ciągów $\{x_n\}$ i $\{g_n\}$. Będziemy także pisać $Y(z) \,\widehat{=}\, \{y_n\}$ lub po prostu $Y(z) \,\widehat{=}\, y_n$.

Zarówno transformacja $\mathcal{Z}$, jak i $\mathcal{Z}^{-1}$ są operacjami liniowymi, co oznacza, że

$$\alpha x_n + \beta y_n \,\widehat{=}\, \alpha X(z) + \beta Y(z).$$

Podstawowe własności transformacji $\mathcal{Z}$, to:

$$\lambda^{-n} x_n \,\widehat{=}\, X(\lambda z), \tag{2.2}$$

$$n x_n \,\widehat{=}\, -z\frac{d}{dz}X(z), \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \,\widehat{=}\, \frac{z}{z-1}X(z), \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{n-i} y_i \,\widehat{=}\, X(z)Y(z), \tag{2.5}$$

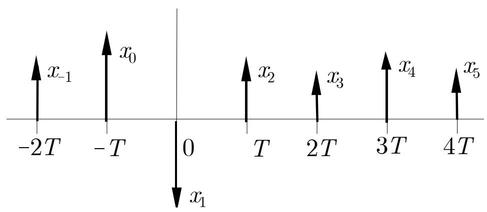
patrz Ćwiczenia 2.1–2.3.

Z uwagi na (2.4),

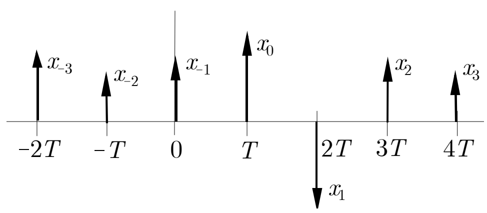
$$\frac{z}{z-1}$$

można nazwać operatorem sumowania. Jest on dyskretnym odpowiednikiem operatora całkowania $1/s$ w transformacji Laplace'a.

Sygnał można przesunąć w lewo, czyli przyspieszyć, lub w prawo, czyli opóźnić. Dla przykładu, sygnał na rys. 2.1 jest przyspieszony wobec pokazanego na rys. 1.1, natomiast pokazany na rys. rys. 2.2 jest opoźniony.



Rys. 2.1: Sygnał jak na rys. 1.1 po przesunięciu w lewo, czyli przespieszeniu.



Rys. 2.2: Sygnał jak na rys. 1.1 po przesunięciu w prawo, czyli opóźnieniu.

Przesuwając w lewo, czyli przyśpieszając ciąg

$$\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \tag{2.6}$$

otrzymujemy

$$\{x_{n+1}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}.$$

Jego transformatą jest

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 z^{-1} + x_3 z^{-2} + x_4 z^{-3} + \cdots \\ & = z(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots) - z x_0 \\ & = zX(z) - z x_0. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$\{x_{n+1}\} \mathrel{\widehat{=}} zX(z) - zx_0.$$

Operacją odwrotną jest przesunięcie w prawo, czyli opóźnienie. Ciąg (2.6) przekształca się w ten sposób w

$$\{x_{n-1}\} = \{x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\},$$

którego transformatą jest

$$\begin{aligned} & x_{-1} + x_0 z^{-1} + x_1 z^{-2} + x_2 z^{-3} + \cdots \\ &= z^{-1}(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots) + x_{-1} \\ &= z^{-1} X(z) + x_{-1}, \end{aligned}$$

co podajemy jako poniższą Własność:

Własność 2.1 (opóźnienie) *Transformatą ciągu przesuniętego w prawo, czyli opóźnionego, jest*

$$x_{n-1} \mathrel{\widehat{=}} z^{-1}X(z) + x_{-1}.$$

Własność 2.2 (opóźnienie o k) *Transformatą ciągu opóźnionego o 2 jest*

$$x_{n-2} \mathrel{\widehat{=}} z^{-2}X(z) + x_{-1}z^{-1} + x_{-2}.$$

Zapisując bowiem (2.1) jak następuje: $\mathcal{Z}\{x_{n-1}\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{x_n\} + x_{-1}$*, spostrzegamy, że*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{n-2}\} &= z^{-1}\mathcal{Z}\{x_{n-1}\} + x_{-2} \\ &= z^{-1}\left[z^{-1}\mathcal{Z}\{x_n\} + x_{-1}\right] + x_{-2}. \end{aligned}$$

Ogólnie zatem

$$x_{n-k} \mathrel{\widehat{=}} z^{-k}X(z) - P_{k-1}(z^{-1}),$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_{k-1}(z^{-1}) &= -\left(x_{-1}z^{-k+1} + \cdots + x_{-k+1}z^{-1} + x_{-k}\right) \\ &= -\left[x_{-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{k-1} + \cdots + x_{-k+1}\left(\frac{1}{z}\right) + x_{-k}\right] \end{aligned}$$

jest wielomianem stopnia $k-1$ argumentu z^{-1}.

Ćwiczenie 2.1 (mnożenie przez λ^{-n}) *Własność (2.2) wynika z poniższego:*

$$\mathcal{Z}\{\lambda^{-n}x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n (\lambda z)^{-n} = X(\lambda z).$$

Ćwiczenie 2.2 (mnożenie przez n) *Prawdziwość reguły (2.3) wynika z równości*

$$-z\frac{d}{dz}X(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{dz^{-n}}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n x_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx_n\}.$$

Ćwiczenie 2.3 (sumowanie) *Aby sprawdzić własność (2.4) oznaczmy $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, skąd wynika, że $y_n - y_{n-1} = x_n$. Z Własności 2.1 wynika, że $Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$, bowiem $x_{-1} = 0$. Zatem $Y(z) = (z/(z-1))X(z)$, co należało wykazać.*

Uwaga 2.1 *Oznaczając $x(nT) = x_n$, tranformatę Laplace'a ciągu impulsów Diraca (1.1) zapisujemy jako*

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-snT}.$$

Zatem (dla $e^{sT} = z$)

$$X^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = X(z).$$

2.2 Twierdzenia graniczne

Pierwsze z podanych poniżej twierdzeń granicznych jest oczywiste, gdyż wynika wprost z definicji transformacji.

Twierdzenie 2.1 *Dla każdego ciągu $\{x_n\}$*

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Twierdzenie 2.2 *Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n$ istnieje, to*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

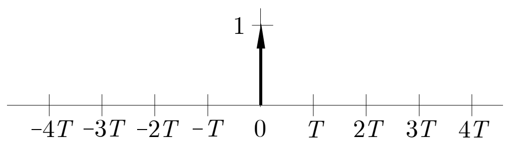
3 Transformaty wybranych ciągów

Dyskretnym impulsem Diraca nazywamy ciąg, patrz rys. 3.1,

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots \\ 1, & \text{dla } n = 0 \\ 0, & \text{dla } n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Z definicji wynika, że

$$\delta_n \mathrel{\widehat{=}} 1. \tag{3.1}$$



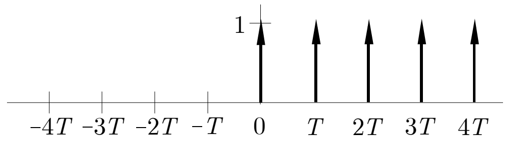
Rys. 3.1: Impuls Diraca.

Skokiem jednostkowym 1_n nazywa się ciąg, rys. 3.2,

$$1_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots, \\ 1, & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Jego transformatą jest

$$1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{z}{z-1}.$$



Rys. 3.2: Skok jednostkowy.

Bezpośrednio z definicji transformacji wnioskujemy, że

$$\lambda^n \mathrel{\widehat{=}} \frac{z}{z-\lambda}. \tag{3.2}$$

Korzystając teraz z reguły o różniczkowaniu względem z, otrzymujemy następnie

$$n\lambda^n \;\widehat{=}\; \frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}.$$

W szczególności zatem

$$n \;\widehat{=}\; \frac{z}{(z-1)^2}.$$

4 Rozkład na ułamki proste

Rozkład na ułamki proste nie różni się zasadniczo od rozkładu, z którym mieliśmy do czynienia przy transformacji Laplace'a. Ma miejsce jednak pewna różnica, co pokażemy na przykładzie. Aby np. znaleźć oryginał funkcji

$$X(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)},$$

zaczynamy od rozłożenia na ułamki proste funkcji

$$\frac{1}{z}X(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-3)},$$

otrzymując

$$\frac{1}{z}X(z) = -\frac{1}{3z} + \frac{1}{4\,(z+1)} + \frac{1}{12\,(z-3)}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} X(z) &= z\left(\frac{1}{z}X(z)\right) = z\left(-\frac{1}{3z} + \frac{1}{4\,(z+1)} + \frac{1}{12\,(z-3)}\right) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{z}{4\,(z+1)} + \frac{z}{12\,(z-3)}. \end{aligned}$$

Zatem, na podstawie (3.1) oraz (3.2), możemy napisać

$$x_n = -\frac{1}{3}\delta_n + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{12}3^n.$$

Istotą metody jest rozkład funkcji wymiernej

$$\frac{L(z)}{M(z)} = \frac{L(z)}{a_m(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

na ułamki o postaci

$$\frac{z}{z-z_i}.$$

Doprowadzamy do tego rozkładając

$$\frac{L(z)}{zM(z)} = \frac{L(z)}{a_m z(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

na ułamki proste o postaci

$$\frac{1}{z-z_i}$$

w sposób omówiony wcześniej w ramach transformacji Laplace'a.

5 Równania różnicowe

Narzędzie jakim jest transformacja $\mathcal{Z}$ pozwala rozwiązywać tzw. równania różnicowe, co pokażemy na przykładach.

Przykład 5.1 (ciąg Fibonacci'ego) *Rozwiązanie równania*

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2},$$

przy czym $y_{-2} = 0$, $y_{-1} = 1$ oraz $u_n \equiv 0$, jest ciągiem Fibonacci'ego, ponieważ każdy jego element jest sumą dwóch poprzednich. Ciąg ten to: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Wynikiem obustronnej transformacji $\mathcal{Z}$ jest, patrz Własność 2.1,

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + y_{-1} + z^{-2}Y(z) + y_{-1}z^{-1} + y_{-2},$$

czyli

$$(1 - z^{-1} - z^{-2})Y(z) = y_{-1}z^{-1} + y_{-1} + y_{-2},$$

skąd wynika, że

$$Y(z) = \frac{y_{-1}z^{-1} + (y_{-1}+y_{-2})}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{(y_{-1}+y_{-2})z^2 + y_{-1}z}{z^2 - z - 1}.$$

Uwzględniając warunek początkowy otrzymujemy zatem

$$Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)},$$

gdzie

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Ponieważ

$$\frac{z+1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a+1}{z-a} - \frac{b+1}{z-b}\right).$$

zatem

$$Y(z) = \frac{1}{a-b}\left[(a+1)\frac{z}{z-a} - (b+1)\frac{z}{z-b}\right],$$

W rezultacie

$$y_n = \frac{1}{a-b}\left[(a+1)a^n - (b+1)b^n\right],$$

czyli

$$\begin{aligned} y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\Bigg[&\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &-\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\Bigg]. \end{aligned}$$

Przykład 5.2 *Rozwiążemy teraz równanie*

$$y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2} = 3u_n + 4u_{n-1}$$

przy warunku początkowym $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$ i $u_n = \delta_n$. Rozwiązanie polega na znalezieniu ciągu $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$, który je spełnia. Zastosowanie transformacji $\mathcal{Z}$ wobec obydwu stron równania doprowadza do równania

$$\begin{aligned} &Y(z) + \left(z^{-1}Y(z) + y_{-1}\right) - 2\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2}\right) \\ &\quad = \left(3 + 4z^{-1}\right)U(z), \end{aligned}$$

patrz Własności 2.1 i 2.2, czyli

$$\left(1+z^{-1}-2z^{-2}\right)Y(z)-\left(2z^{-1}y_{-1}+2y_{-2}-y_{-1}\right)$$
$$=\left(3+4z^{-1}\right)U(z).$$

Zatem

$$\begin{aligned}Y(z)&=\frac{3+4z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}U(z)+\frac{2z^{-1}y_{-1}+(2y_{-2}-y_{-1})}{1+z^{-1}-2z^{-2}}\\&=\frac{3z^2+4z}{z^2+z-2}U(z)+\frac{(2y_{-2}-y_{-1})z^2+2zy_{-1}}{z^2+z-2}\\&=\frac{3z^2+4z}{(z-1)(z+2)}U(z)+\frac{(2y_{-2}-y_{-1})z^2+2zy_{-1}}{(z-1)(z+2)}.\end{aligned}$$

Dla zadanego warunku początkowego i pobudzenia otrzymujemy

$$Y(z)=\frac{z\,(3z+4)}{(z-1)(z+2)}+\frac{4z\,(z+1)}{(z-1)(z+2)}.$$

Rozkładając na ułamki proste, obserwujemy

$$\frac{3z+4}{(z-1)(z+2)}=\frac{7}{3\,(z-1)}+\frac{2}{3\,(z+2)}$$

oraz

$$\frac{z+1}{(z-1)(z+2)}=\frac{2}{3\,(z-1)}+\frac{1}{3\,(z+2)},$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned}Y(z)&=\frac{7}{3}\frac{z}{z-1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z+2}+\frac{8}{3}\frac{z}{z-1}+\frac{4}{3}\frac{z}{z+2}\\&=\frac{5z}{z-1}+\frac{2z}{z+2}.\end{aligned}$$

W rezultacie

$$y_n=5\times 1_n+2(-2)^n.$$

6 Tablica transformat

x_n	$X(z)$
δ_n	1
1_n	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
λ^n	$\frac{z}{z-\lambda}$
$n\lambda^n$	$\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$
$\sin\omega n$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$