1 Opisy systemów dyskretnych

Podamy teraz różne sposoby opisu liniowych systemów dynamicznych, w których czas biegnie w sposób dyskretny. System przedstawiony na rys. 1.1 przekształca wejściowy ciąg liczbowy

$$\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots$$

w ciąg wyjściowy

$$\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots.$$

Ciągi te, czyli sygnały, oznaczymy jako $\{u_n\}$ oraz $\{y_n\}$. Gdy nie będzie zachodzić obawa nieporozumienia, będziemy pisać po prostu u_n oraz y_n.

Rys. 1.1: System dyskretny.

1.1 Równanie różnicowe

Zasadniczym opisem liniowego, dyskretnego systemu dynamicznego jest następujące, liniowe równanie różnicowe:

$$\begin{aligned} &a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-m} \\ &= b_l u_{n-m+l} + \cdots + b_0 u_{n-m}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

przy czym $l \le m$. Zakładamy przy tym, że $a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$ oraz $b_l \neq 0$. Liczbę m nazywa się rzędem równania, czyli także systemu. Warunkiem początkowym jest

$$y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-m}.$$

Jeśli $y_{-1} = y_{-2} = \cdots = y_{-m} = 0$, to mówimy, że jest on zerowy. Należy zwrócić uwagę na to, że w a_i oraz b_i indeksy rozróżniają współczynniki równania, natomiast w u_i oraz y_i oznaczają chwilę.

Równanie to opisuje zachowanie się systemu, tzn. określa jego reakcję na pobudzenie. Przez pobudzenie rozumiemy ciąg wejściowy taki, że $u_n = 0$ dla $n = \ldots, -2, -1$, tzn. taki, który rozpoczyna się w istocie w chwili $n = 0$, czyli

$$\ldots, 0, 0, u_0, u_1, u_2, \ldots.$$

Aby go określić, wystarczy zatem podać $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Pobudzeniem zerowym jest ciąg $u_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ (i siłą rzeczy, dla $n = \ldots, -2, -1$). Reakcją jest natomiast ciąg $y_0, y_1, y_2, \ldots$.

W celu wyznaczenia reakcji systemu, tzn. rozwiązania równania (1.1), wykorzystamy narzędzie jakim jest transformacja $\mathcal{Z}$. Ponieważ[1]

$$y_{n-k} \mathrel{\widehat{=}} z^{-k} Y(z) - P_{k-1}(z^{-1}),$$

gdzie jest wielomianem stopnia $k-1$, transformacja lewej strony doprowadza do wyrażenia

$$(a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}) Y(z) - V_{m-1}(z^{-1}),$$

[1] patrz: 7. Transformacja Laplace'a, Własność 2.2.

gdzie

$$V_{m-1}(z^{-1}) = a_m + a_{m-1} P_1(z^{-1}) + \cdots + a_0 P_{m-1}(z^{-1})$$

jest wielomianem stopnia $m-1$ argumentu z^{-1} o współczynnikach zależnych od warunku początkowego $y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-m}$ oraz $a_0, \ldots, a_m$. Dokonana wobec prawej strony daje wyrażenie

$$(b_l z^{-m+l} + \cdots + b_0 z^{-m}) U(z),$$

bowiem $u_n = 0$ dla $n = \ldots, -2, -1$. Rezultatem jest zatem równanie

$$\begin{aligned} &(a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}) Y(z) - V_{m-1}(z^{-1}) \\ &= (b_l z^{-m+l} + \cdots + b_0 z^{-m}) U(z), \end{aligned}$$

z którego wynika

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_l z^{-m+l} + \cdots + b_0 z^{-m}}{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}} U(z) \\ &+ \frac{V_{m-1}(z^{-1})}{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}} \\ &= \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \cdots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0} U(z) \\ &+ \frac{z^m V_{m-1}(z^{-1})}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0}. \end{aligned}$$

Ponieważ $V_{m-1}(z^{-1})$ jest wielomianem stopnia $m-1$ argumentu z^{-1}, zatem można go zapisać w postaci:

$$V_{m-1}(z^{-1}) = w_{m-1} + w_{m-2} z^{-1} \cdots + w_0 z^{-(m-1)}.$$

Oznaczając następnie

$$\begin{aligned} W_{m-1}(z) &= z^{m-1} V(z^{-1}) \\ &= w_{m-1} z^{m-1} + \cdots + w_1 z + w_0, \end{aligned}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \cdots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0} U(z) \\ &+ \frac{z W_{m-1}(z)}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0}. \end{aligned}$$

W celu uproszczenia zapisu przyjmujemy

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0,$$

$$L(z) = b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \cdots + b_0,$$

dzięki czemu możemy napisać, że

$$Y(z) = \frac{L(z)}{M(z)} U(z) + \frac{z W(z)}{M(z)},$$

gdzie $W_{m-1}(z)$ jest wielomianem stopnia $m-1$. Wynika stąd, że

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{L(z)}{M(z)} U(z)\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z W_{m-1}(z)}{M(z)}\right\}. \tag{1.2}$$

Reakcja systemu zależy zatem od pobudzenia, warunku początkowego i własności systemu. Pierwsza składowa odpowiedzi nie zależy jednak od pobudzenia u_n, natomiast druga od warunku początkowego.

Zaznaczmy jeszcze, że $M(z)$ nazywa się wielomianem charakterystycznym równania różnicowego, czyli także systemu, a $M(z) = 0$ równaniem charakterystycznym równania, a także systemu.

Przykład 1.1 *System opisany jest równaniem różnicowym*

$$y_n - \lambda y_{n-1} = a u_n.$$

Wyznaczymy jego odpowiedź na pobudzenie $u_n = \delta_n$ *przy warunku początkowym* y_{-1}. *Dokonując obustronnej transformacji* $\mathcal{Z}$ *otrzymujemy*

$$Y(z) - \lambda(z^{-1}Y(z) - y_{-1}) = aU(z),$$

czyli

$$Y(z) = -\frac{y_{-1}}{1-\lambda z^{-1}} + \frac{a}{1-\lambda z^{-1}}U(z).$$

Ponieważ $U(z) = 1$, *zatem*

$$Y(z) = -y_{-1}\frac{z}{z-\lambda} + a\frac{z}{z-\lambda}$$

oraz

$$y_n = -y_{-1}\lambda^n + a\lambda^n.$$

Przykład 1.2 *Dla systemu opisanego równaniem różnicowym*

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = 7\delta_n,$$

dokonujemy obustronnej transformacji $\mathcal{Z}$ *otrzymując*

$$\begin{aligned} &Y(z) - 5\left(z^{-1}Y(z) - y_{-1}\right) \\ &+ 6\left(z^{-2}Y(z) - z^{-1}y_{-1} - y_{-2}\right) = 7 \end{aligned}$$

skąd wynika

$$Y(z)(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}) + (5y_{-1} - 6y_{-2} - 6z^{-1}y_{-1}) = 7,$$

czyli

$$Y(z) = \frac{7}{1-5z^{-1}+6z^{-2}} - \frac{(5y_{-1} - 6y_{-2}) - 6z^{-1}y_{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{7z^2}{z^2-5z+6} - \frac{(5y_{-1}-6y_{-2})z^2 - 6y_{-1}z}{z^2-5z+6} \\ &= \frac{7z^2}{(z-2)(z-3)} - \frac{(5y_{-1}-6y_{-2})z^2 - 6y_{-1}z}{(z-2)(z-3)}. \end{aligned}$$

Wyznaczenie oryginału, czyli rozwiązania równania, które jest reakcją systemu, nie sprawia żadnych trudności.

1.2 Transmitancja

Definicja 1.1 *Transmitancją* $K(z)$ *systemu dyskretnego nazywamy funkcję*

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{b_l z^l + b_{l-1}z^{l-1} + \cdots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_0}. \tag{1.3}$$

Transmitancja jest funkcją wymierną, pierwiastki wielomianu charakterystycznego $M(z)$ są jej biegunami.

Reakcję systemu (1.2) możemy teraz zapisać jako:

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zW_{m-1}(z)}{M(z)}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{K(z)U(z)\right\}. \tag{1.4}$$

Jeśli zatem warunek początkowy jest zerowy, to

$$Y(z) = K(z)U(z).$$

System jest liniowy, co oznacza, że – przy zerowym warunku początkowym – liniowej operacji na sygnale wejściowym odpowiada taka sama operacja na sygnale wejściowym. Jeśli więc np. reakcjami na pobudzenia $\overline{u}_n$ i $\widehat{u}_n$ są $\overline{y}_n$ i $\widehat{y}_n$, to reakcją na pobudzenie $a\overline{u}_n + b\widehat{u}_n$ jest $a\overline{y}_n + b\widehat{y}_n$. Odpowiedzią na u_{n-k} jest y_{n-k}.

Uwaga 1.1 *System o transmitancji*

$$\frac{z}{z-1}$$

ma własność sumowania, bowiem $y_n = \sum_{i=0}^n u_i$. *Jest on dyskretnym odpowiednikiem ciągłego systemu całkującego.*

1.3 Odpowiedzi na standardowe pobudzenia

Standardowymi pobudzeniami stosowanymi przy analizie systemów dynamicznych są dyskretny impuls Diraca δ_n i skok jednostkowy.

1.3.1 Odpowiedź impulsowa

Definicja 1.2 *Odpowiedzią impulsową* $\{k_n\}$ *nazywamy reakcję systemu na pobudzenie impulsem Diraca* δ_n *w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Związek pomiędzy odpowiedzią impulsową i transmitancją ustala poniższa własność.

Własność 1.1 *Odpowiedź impulsowa i transmitancja powiązane są następującym wzorem:*

$$k_n = \mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}.$$

1.3.2 Odpowiedź skokowa

Definicja 1.3 *Odpowiedzią skokową* $\{\lambda_n\}$ *nazywamy reakcję systemu na pobudzenie skokiem jednostkowym* 1_n *w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Ponieważ $1_n \mathrel{\widehat{=}} z/(z-1)$, związek między odpowiedzią skokową i transmitancją określony jest wzorem

$$\lambda_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}K(z)\right\}.$$

Pamiętając, że $z/(z-1)$ jest operatorem sumowania, otrzymujemy:

Własność 1.2 *Pomiędzy* k_n *i* λ_n *zachodzą następujące relacje:*

$$\lambda_n = \sum_{i=0}^n k_i, \quad k_n = \lambda_n - \lambda_{n-1}.$$

Rozwijając w szereg potęgowy względem z^{-1}, możemy napisać (dla $l \le m$)

$$\frac{z}{z-1}K(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots,$$

skąd wynika, że

$$\{\lambda_n\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\},$$

przy czym $0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{p-1}$ i dopiero $\alpha_p = b_l/a_m \ne 0$, gdzie $p = m - l$. Oznacza to, że odpowiedź skokowa jest opóźniona względem pobudzenia o $p = m - l$. Podobnie jest z odpowiedzią impulsową.

2 Stabilność

2.1 Definicja

Przedmiotem naszego zainteresowania jest teraz system dyskretny o transmitancji (1.3). Przez

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

oznaczymy pierwiastki jego wielomianu charakterystycznego

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0. \qquad (2.1)$$

Omówimy podstawową dla nas własność jaką jest stabilność. Cechy tej będziemy poźniej żądać od dyskretnych systemów automatycznej regulacji.

Definicja 2.1 *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

to system nazywamy stabilnym.

2.2 Twierdzenie o stabilności

Twierdzenie 2.1 *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|z_1| < 1, |z_2| < 1, \ldots, |z_m| < 1. \qquad (2.2)$$

Dowód. Pełnego dowodu nie będziemy przeprowadzać. Zauważmy jedynie, że z (1.4) wynika, że (przy zerowym pobudzeniu)

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zW_{m-1}(z)}{M(z)}\right\}.$$

Przy założeniu, że bieguny transmitancji są jednokrotne, rozkład na ułamki proste doprowadza do wyrażenia

$$\frac{W_{m-1}(z)}{M(z)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_m}{z-z_m}.$$

Zatem

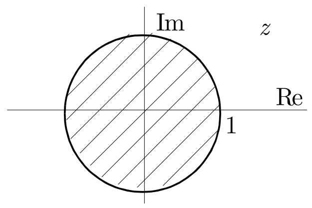
$$\frac{zW_{m-1}(z)}{M(z)} = a_1\frac{z}{z-z_1} + \cdots + a_m\frac{z}{z-z_m}.$$

W rezultacie

$$y_n = a_1 z_1^n + \cdots + a_m z_m^n.$$

Zbieżność $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy $|z| < 1$. Ma to miejsce zarówno dla rzeczywistego jak i zespolonego z. □

System jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz okręgu o promieniu 1 i środku $z = 0$, tzn. w kole jednostkowym, rys. 2.1.



Rys. 2.1: Koło o promieniu 1.

2.3 Własności systemów stabilnych

Własność 2.1 *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} k_n = 0.$$

Jeśli natomiast granica $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ istnieje, to nazywamy ją wzmocnieniem systemu w stanie ustalonym. O jej istnieniu stanowi poniższa Własność.

Własność 2.2 *Granica*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = K(1).$$

Dowód. Jest oczywiste, że

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\{K(z)U(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zL(z)}{(z-1)M(z)}\right\},$$

bowiem $u_n = 1_n$, tzn. $U(z) = z/(z-1)$. Zakładając, że bieguny są jednokrotne i dokonując rozkładu na ułamki proste, otrzymujemy

$$\frac{L(z)}{(z-1)M(z)} = \frac{a_0}{z-1} + \frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_m}{z-z_m},$$

a zatem

$$\frac{zL(z)}{(z-1)M(z)} = \frac{a_0 z}{z-1} + \frac{a_1 z}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_m z}{z-z_m},$$

skąd wynika

$$\lambda_n = a_0 + a_1 z^n + \cdots + a_m z_m^n.$$

Zatem istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ jest równoważne warunkowi (2.2). Jeśli warunek ten jest spełniony, to

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a_0.$$

Aby wyznaczyć a_0, zauważmy, że

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = a_0 + (z-1)\left(\frac{a_1 z}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_m z}{z-z_m}\right),$$

skąd wynika, że $a_0 = K(1)$. □

3 Transformacja $z = (w+1)/(w-1)$

Aby sprawdzić czy system dyskretny jest stabilny, należy rozstrzygnąć, czy wszystkie pierwiastki $z_1, \ldots, z_m$ jego wielomianu charakterystycznego (2.1) spełniają zestaw nierówności (2.2), tzn. czy leżą w kole jednostkowym.

Można tego dokonać przez odwzorowanie zmiennej zespolonej w na zmienną z:

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \tag{3.1}$$

skąd wynika

$$w = \frac{z+1}{z-1}.$$

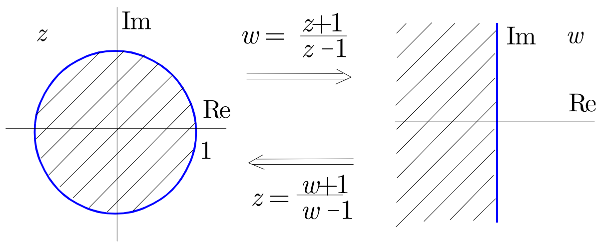
Jak można sprawdzić, patrz rys. 3.1 i Ćwiczenie 3.1, każde z tych odwzorowań przekształca:

a) okrąg jednostkowy pozbawiony punktu $(1, j0)$ w oś liczb urojonych i na odwrót,

b) wnętrze okręgu jednostkowego w lewą półpłaszczyznę i na odwrót,

c) zewnętrze okręgu jednostkowego w prawą półpłaszczyznę i na odwrót.

Ponadto, punkt $z = 1$ nie ma swojego odpowiednika na płaszczyźnie w, bowiem dla niego $(z+1)/(z-1) = (1+1)/(1-1) = 2/0$.



Rys. 3.1: Transformacja koła w lewą półpłaszczyznę.

Ćwiczenie 3.1 *Aby wykazać a), zauważmy, że okrąg jednostkowy na płaszczyźnie z jest zbiorem punktów $e^{j\varphi}$ takich, że $\varphi \in [0, 2\pi)$. Jest on odwzorowywany w zbiór punktów w o postaci*

$$w = \frac{e^{j\varphi}+1}{e^{j\varphi}-1} = j\frac{-\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = -j \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Odcinek $(0, 2\pi)$, czyli odpowiadający mu okrąg jednostkowy z usuniętym punktem $z = 1$ (dla którego $\varphi = 0$) jest odwzorowywany zatem w oś liczb urojonych $(-j\infty, j\infty)$. Dolnemu półokręgowi, dla którego $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, odpowiada dodatnia półoś, górnemu ujemna. Aby sprawdzić b) i c) oznaczamy

$$\mathcal{T}(w) = \frac{w+1}{w-1},$$

podstawiamy $w = \sigma + j\omega$ i stwierdzamy następnie, że

$$|\mathcal{T}(w)| = \left|\frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma - j\omega - 1}\right| = 1 + \frac{4\sigma}{(\sigma-1)^2 + \omega^2}.$$

Zatem, $|\mathcal{T}(w)| < 1$ dla $\sigma < 0$, co oznacza, że wnętrze okręgu odpowiada lewej półpłaszczyźnie. Podobnie, $|\mathcal{T}(w)| = 1$ dla $\sigma = 0$ i $|\mathcal{T}(w)| > 1$ dla $\sigma > 0$.

Aby zweryfikować, czy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego

$$M(z) = 0 \tag{3.2}$$

spełniają nierówności (2.2), można zatem sprawdzić, czy wszystkie pierwiastki równania

$$M\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = 0,$$

czyli równania

$$(w-1)^m M\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = 0,$$

w którym nie ma już ułamków, leżą w lewej półpłaszczyźnie, który to problem można rozwiązać stosując np. twierdzenie o znaku współczynników, kryterium Hurwitza, czy Michajłowa[2].

Przykład 3.1 *Wielomian*

$$6z^2 - z - 1 = (3z+1)(2z-1)$$

ma pierwiastki $z_1 = 1/2$ oraz $z_2 = -1/3$. Dokonując w równaniu

$$6z^2 - z - 1 = 0$$

podstawienia (3.1), otrzymujemy

$$6\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - \left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 1 = 0,$$

które to równanie, po pomnożeniu obydwu stron przez $(w-1)^2$, przyjmuje postać

$$6(w-1)^2 - (w+1)(w-1) - (w-1)^2 = 0,$$

czyli

$$4w^2 + 14w + 6 = 0,$$

Jego rozwiązania, to $w_1 = -3, w_2 = -1/2$. Jak łatwo można sprawdzić, $z_1 = (w_1+1)/(w_1-1)$ oraz $z_2 = (w_2+1)/(w_2-1)$. Pierwiastki z_1, z_2 leżą w kole jednostkowym, natomiast pierwiastki w_1, w_2 w lewej półpłaszczyźnie.

Przykład 3.2 *System ma transmitancję*

$$K(z) = \frac{1}{z + 6z^2 - 2}.$$

Podstawienie (3.1) do równania

$$z + 6z^2 - 2 = 0 \tag{3.3}$$

doprowadza do kolejnego:

$$6\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + \frac{w+1}{w-1} - 2 = 0,$$

czyli

$$5w^2 + 16w + 3 = 0.$$

Stosując kryterium Hurwitza stwierdzamy, że wszystkie jego pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie. Wynika stąd, że pierwiastki równania (3.3) leżą w kole jednostkowym. System jest stabilny.

[2] patrz: 3. Stabilność. Kryteria

Przykład 3.3 *System ma transmitancję*

$$K(z) = \frac{1}{2z^2 + 3z - 2}.$$

Podstawiając (3.1) do równania $2z^2 + 3z - 2 = 0$ *otrzymujemy* $3w^2 + 8w - 3 = 0$. *Z twierdzenia o znaku współczynników wynika zatem, że system nie jest stabilny.*

W opisanym postępowaniu ukryte jest jednak pewne niebezpieczeństwo, które jest związane z tym, że punkt $z = 1$ nie ma swojego odpowiednika na płaszczyźnie w. Pokazuje to poniższy przykład. System ma transmitancję $K(z) = 1/M(z)$, przy czym wielomian

$$M(z) = 2z^2 - 3z + 1 = (2z - 1)(z - 1)$$

drugiego stopnia ma dwa pierwiastki: stabilny $z_1 = 1/2$ i niestabilny $z_2 = 1$. Podstawienie (3.1) prowadzi do równania

$$2\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 3\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 1 = 0.$$

Po pomnożeniu obydwu stron przez $(z-1)^2$ otrzymujemy równanie pierwszego stopnia

$$w + 3 = 0,$$

które ma tylko jeden pierwiastek $w_1 = -3$. Leży on w lewej półpłaszczyżnie i jest skojarzony z z_1. Pierwiastek $z_2 = 1$ nie ma natomiast swojego odpowiednika w dziedzinie w. Można powiedzieć, że opisana metoda obniża stopień równania i gubi w ten sposób niestabilny biegun $z = 1$.

Nietrudno jednak zabezpieczyć się przed grożącym błędem. Zauważmy bowiem, że $M(1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 1$ jest pierwiastkiem równania (3.2). W rezultacie dochodzimy do ostatecznego wniosku:

Twierdzenie 3.1 *System o równaniu charakterystycznym (2.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*
$\triangleright$ $M(1) \neq 0$ *oraz*
$\triangleright$ *wszystkie rozwiązania równania*

$$(w-1)^m M\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = 0$$

leżą w lewej półpłaszczyźnie.

Przykład 3.4 *System trzeciego rzędu ma transmitancję*

$$K(s) = \frac{z}{M(z)},$$

gdzie

$$M(z) = 12z^3 - 11z^2 - 2z + 1.$$

Podstawienie (3.1) do równania charakterystycznego trzeciego stopnia

$$12z^3 - 11z^2 - 2z + 1 = 0$$

prowadzi do równania

$$12\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 11\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 1 = 0.$$

Po pomnożeniu obydwu stron przez $(w-1)^3$ *otrzymujemy*

$$12(w+1)^3 - 11(w+1)^2(w-1) - 2(w+1)(w-1)^2 + (w-1)^3 = 0,$$

czyli równanie drugiego stopnia o postaci:

$$6w^2 + 13w + 5 = 0,$$

o którym traktuje drugi z warunków Twierdzenia 3.1. Ponieważ jego macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},$$

zatem wyznaczniki Hurwitza to $\Delta_1 = 13 > 0$, $\Delta_2 = 13 \times 5 - 0 \times 6 = 65 > 0$. *Wynika stąd, że obydwa pierwiastki równania*

$$(w-1)^3 M\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = 1$$

leżą w lewej półpłaszczyźnie. Odpowiadające im (na zasadzie przekształcenia (3.1)) pierwiastki równania charakterystycznego leżą więc w kole jednostkowym, czyli są stabilne. Drugi z warunków w Twierdzeniu 3.1 spełniony. Ponieważ jednak

$$\begin{aligned} M(1) &= \left(12z^3 - 11z^2 - 2z + 1\right)\Big|_{z=1} \\ &= 12 - 11 - 2 + 1 = 0, \end{aligned}$$

zatem pierwszy warunek nie jest spełniony, z uwagi na to, że trzecim pierwiastkiem wielomianu $M(z)$ *jest* 1. *System jest niestabilny.*