1 Dyskretny system automatycznej regulacji

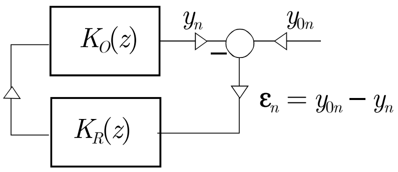
Dyskretny system automatycznej regulacji pokazany jest na rys. 1.1. Transmitancją systemu zamkniętego, tzn. systemu o wejściu y_{0n} i wyjściu y_n, jest zatem

$$K_Z(z) = \frac{K(z)}{1+K(z)},$$

gdzie

$$K(z) = K_O(z)K_R(z)$$

jest transmitancją systemu otwartego, a $K_O(z)$ oraz $K_R(z)$ są odpowiednio transmitancjami obiektu i regulatora.



Rys. 1.1: Dyskretny system automatycznej regulacji.

Regulator powinien zapewnić, że sygnał wyjściowy obiektu y_n jest bliski sygnałowi wartości zadanej y_{0n}. Oznacza to, że uchyb $\varepsilon_n = y_{0n} - y_n$ powinien być możliwie mały, czyli bliski zeru.

Oznaczając

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

gdzie $L(z)$ i $M(z)$ są wielomianami, otrzymujemy

$$K_Z(z) = \frac{L(z)}{L(z)+M(z)},$$

skąd wynika, że

$$M_Z(z) = L(z) + M(z)$$

jest wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego. Ponadto

$$K_E(z) = \frac{E(z)}{Y_0(z)} = \frac{1}{1+K(z)} = \frac{M(z)}{L(z)+M(z)},$$

gdzie $E(z) = \mathcal{Z}\{\varepsilon_n\}$.

Podstawową własnością, jaką system regulacji powinien mieć jest stabilność, do badania której można stosować dowolne z podanych kryteriów.

1.1 Regulacja P

W naszej analizie zakładamy, że warunki początkowe w obiekcie i regulatorze są zerowe oraz wartość zadana jest skokiem jednostkowym, tzn.

$$y_{0n} = 1_n.$$

Transmitancją obiektu jest

$$K_O(z) = \frac{L_O(z)}{M_O(z)},$$

gdzie

$$L_O(z) = b_l z^l + b_{l-1}z^{l-1} + \cdots + b_1 z + b_0,$$

$$M_O(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Obiekt nie ma własności sumacyjnych, tzn. jego transmitancja nie ma bieguna w punkcie $z = 1$.

O regulacji P mówimy, gdy regulator ma transmitancję $K_R(z) = k$, czyli gdy jest proporcjonalny, tzn. typu P. Przy regulatorze takim transmitancją układu otwartego jest

$$K(z) = kK_O(z)$$

Zakładamy przy tym, że system zamknięty jest stabilny, skąd wynika istnienie granicy $\varepsilon_\infty = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n$. Aby ją wyznaczyć, zauważmy, że

$$K_E(s) = \frac{1}{1+kK_O(z)},$$

skąd wynika

$$E(z) = \frac{z}{z-1}K_E(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{1+kK_O(z)},$$

ponieważ $Y_0(z) = z/(z-1)$. Na mocy poznanego wcześniej twierdzenia granicznego[1]

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = (z-1)E(z)|_{z=1} = \frac{1}{1+kK_O(1)}.$$

Ponieważ $z = 1$ nie jest biegunem transmitancji $K_O(z)$, wykazaliśmy zatem:

Własność 1.1 *W stabilnym systemie automatycznej regulacji typu P*

$$\varepsilon_\infty \neq 0.$$

W transmitancji systemu zamkniętego

$$K_Z(z) = \frac{kK_O(s)}{1+kK_O(s)} = \frac{kL_O(z)}{kL_O(z)+M_O(z)}$$

różnica pomiędzy stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku jest równa $m - l$, która to liczba jest opóźnieniem jego odpowiedzi skokowej.

1.2 Regulacja I

Omówimy układ regulacji jak w § 1.1, z tą różnicą, że transmitancją regulatora jest teraz

$$K_R(z) = \frac{kz}{z-1},$$

co oznacza, że ma on własności sumacyjne. Jego odpowiedzią impulsową jest bowiem $k \times 1_n$, co oznacza, że reakcją na pobudzenie x_n jest $k\sum_{i=0}^{n} x_i$. Regulator jest zatem dyskretnym odpowiednikiem całkującego regulatora I. Zakładamy ponadto, że system zamknięty jest stabilny.

Aby wyznaczyć ε_∞, zauważmy, że

$$K(z) = \frac{kz}{z-1}K_O(z),$$

[1] patrz: 7. Transformacja $\mathcal{Z}$, § 2.3.

skąd wynika, że

$$K_E(z) = \frac{1}{1 + \dfrac{kz}{z-1}K_O(z)} = \frac{z-1}{(z-1) + kzK_O(z)}$$

i w rezultacie, przy założonym sygnale $y_{0n} = 1_n$,

$$E(z) = \frac{z}{z-1}K_E(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z-1}{(z-1)+kzK_O(z)}$$
$$= \frac{z}{(z-1)+kzK_O(z)}$$

co, po zastosowaniu wspomnianego wcześniej twierdzenia granicznego, prowadzi do wniosku, że

$$\varepsilon_\infty = \left.\frac{z}{(z-1)+kK_O(z)}\right|_{z=1} = 0.$$

Prawdziwa jest więc następująca własność:

Własność 1.2 *W stabilnym systemie automatycznej regulacji typu I*

$$\varepsilon_\infty = 0.$$

Transmitancją systemu zamkniętego jest teraz

$$K_Z(z) = \frac{\dfrac{kz}{z-1}K_O(z)}{1 + \dfrac{kz}{z-1}K_O(z)} = \frac{kzL_O(z)}{(z-1)\,M_O(z) + kzL_O(z)}.$$

Różnica pomiędzy stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku jest równa $m - l$, czyli jest taka sama jak przy regulacji P. Wynika stąd, że opóźnienienie odpowiedzi skokowej jest także takie same, równe $m - l$.

Szybkość działania systemu regulacji mierzona opóźnieniem odpowiedzi skokowej jest zatem dla regulacji P oraz I taka sama.

2 System ciągły sterowany dyskretnie

Instalując w ciągłym systemie dynamicznym urządzenie nazywane impulsatorem, zamienia się go niejako w system dyskretny.

2.1 Zamiana sygnału ciągłego na dyskretny

2.1.1 Impulsator

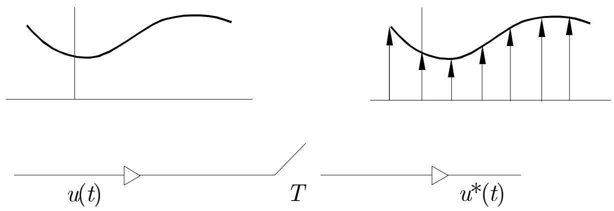
Wejściem impulsatora, patrz rys. 2.1, jest sygnał $u(t)$, natomiast wyjściem

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT). \tag{2.1}$$

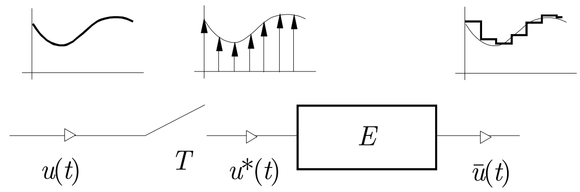
Zamienia więc on funkcję czasu w ciąg impulsów Diraca, modulowanych przez jej wartości w chwilach $0, T, 2T, \ldots$. Liczba T nazywa się okresem impulsowania.

Impulsator może współpracować z ekstrapolatorem oznaczonym na rys. 2.2 jako E. Jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca jak w (2.1). Wyjściem $\overline{u}(t)$ jest natomiast funkcja stała pomiędzy chwilami, w których działa impulsator, tzn. stała na odcinkach $[0, T), [T, 2T), \ldots$. Na odcinku $[0, T)$ przyjmuje ona wartość $u(0)$, na $[T, 2T)$ wartość $u(T)$, na kolejnym $[2T, 3T)$ wartość $u(2T)$ itd. Ogólnie zatem

$$\overline{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T).$$



Rys. 2.1: Impulsator.



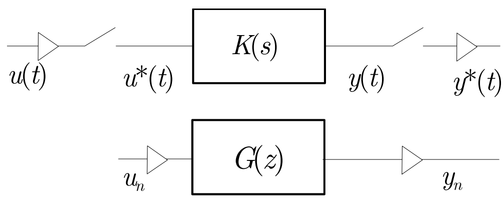
Rys. 2.2: Impulsator z ekstrapolatorem.

2.2 System ciągły sterowany przez impulsator

Ciągły obiekt regulacji może współpracować z dwoma synchronicznie działającymi impulsatorami o okresie T, z których jeden znajduje się na wejściu tego obiektu, a drugi na wyjściu, rys 2.3. Sygnały $u^*(t)$ i $y^*(t)$ są ciągami impulsów Diraca, przy czym $u^*(t)$ dane jest wzorem (2.1), natomiast

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT).$$

Z sygnałem $u^*(t)$ można w sposób wzajemnie jednoznaczny skojarzyć ciąg liczbowy $u_0 = u(0), u_1 = u(T), u_2 = u(2T), \ldots$, a z sygnałem $y^*(t)$ ciąg $y_1 = y(0), y_1 = y(T), y_2 = y(2T), \ldots$. Ciąg wejściowy $\{u_n; n = 0, 1, \ldots\}$ jest przez system dynamiczny przekształcany w ciąg wyjściowy $\{y_n; n = 0, 1, \ldots\}$. System, który to robi, jest oczywiście dyskretny.



Rys. 2.3: Obiekt ciągły sterowany przez impulsator.

Znajdziemy teraz jego transmitancję. Załóżmy w tym celu, że warunek początkowy w obiekcie (tzn. systemie ciągłym o transmitancji $K(s)$) jest zerowy i $u(t) = \delta(t)$. Zatem $y(t) = k(t)$ i, w rezultacie, $y_n = k(nT)$. Wejściem systemu dyskretnego o transmitancji $G(z)$ jest więc $u_n = \delta_n$, wyjściem jest $y_n = k(nT)$. Zatem

$$G(z) = \mathcal{Z}\{k(nT)\}.$$

Schemat postępowania przy znajdywaniu transmitancji dyskretnej pokazany jest poniżej:

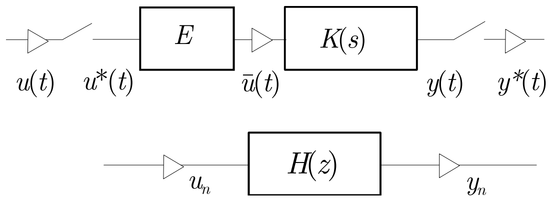
$$K(s) \stackrel{\mathfrak{L}^{-1}}{\Longrightarrow} k(t) \Longrightarrow \mathcal{Z}\{k(nT)\} = G(z). \tag{2.2}$$

Przykład 2.1 *Niech* $K(s) = 1/(s + \alpha)$. *Ponieważ* $k(t) = e^{-\alpha t}$, *a zatem* $k_n = e^{-n\alpha T}$. *W rezultacie* $G(z) = z/(z - e^{-\alpha T})$.

Przykład 2.2 *Dla* $K(s) = 1/s$ *znajdujemy* $k(t) = 1$. *Wynika stąd, że* $k_n = 1$. *Zatem* $G(z) = z/(z - 1)$.

2.3 System ciągły, impulsator i ekstrapolator

Impulsatorowi znajdującemu się na wejściu obiektu ciągłego o transmitancji $K(z)$ może towarzyszyć ekstrapolator, co pokazano na rys. 2.4. System, który przekształca sygnał $u_n = u(nT)$ w $y_n = y(nT)$ jest natury dyskretnej.



Rys. 2.4: Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem.

W celu znalezienia jego transmitancji zakładamy, że w systemie ciągłym o transmitancji $K(s)$ warunek początkowy jest zerowy i $u(t) = \delta(t)$, tzn. $u_n = \delta_n$. W sytuacji takiej $\overline{u}(t) = 1(t) - 1(t - T)$, a zatem $y(t) = \lambda(t) - \lambda(t - T)$. W rezultacie $y_n = \lambda(nT) - \lambda((n - 1)T)$. Transmitancją jest więc

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}\left\{\lambda(nT) - \lambda((n-1)T)\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{\lambda(nT)\} - z^{-1}\mathcal{Z}\{\lambda(nT)\}, \end{aligned}$$

czyli

$$H(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{\lambda(nT)\}.$$

Możemy więc podać następujący schemat postępowania, który prowadzi do transmitancji dyskretnej:

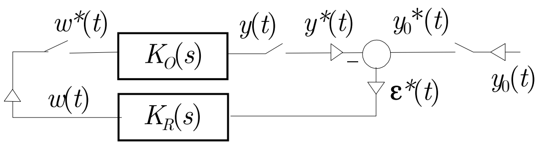
$$\begin{aligned} K(s) &\Longrightarrow \frac{1}{s}K(s) \overset{\mathfrak{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \lambda(t) \overset{\mathcal{Z}}{\Longrightarrow} \mathcal{Z}\{\lambda(nT)\} \\ &\Longrightarrow \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{\lambda(nT)\} = H(z). \end{aligned}$$

Przykład 2.3 *Niech* $K(s) = 1/(s + 1)$. *Ponieważ* $\lambda(t) = 1 - e^{-t}$, *więc* $\lambda(nT) = 1 - e^{-nT}$. *Zatem transmitancją systemu dyskretnego jest* $H(z) = (1 - e^{-T})z/\left(z - 1\right)\left(z - e^{-T}\right)$.

Przykład 2.4 *Dla* $K(s) = 1/s$ *odpowiedzią skokową jest* $\lambda(t) = t$. *Zatem* $\lambda(nt) = nT$ *i w rezultacie* $H(z) = Tz/(z - 1)^2$.

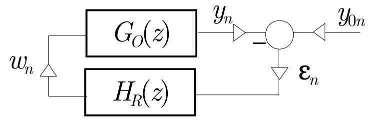
3 Regulacja – obiekty ciągłe

Wykorzystując impulsator i ekstrapolator można budować systemy automatycznej regulacji, w których obiekty ciągłe sterowane są w sposób dyskretny. Przykład takiego systemu z impulsatorami pokazano na rys. 3.1.



Rys. 3.1: Układ automatycznej regulacji z impulsatorami.

Z uwagi na to, że sygnały $y_0^*(t)$, $\varepsilon^*(t)$, $w^*(t)$ oraz $y^*(t)$ można utożsamić z ciągami liczbowymi y_{0n}, ε_n, w_n oraz y_n, sporządzamy schemat systemu dyskretnego pokazany na tym samym rysunku. Należy zaznaczyć, że o ile system ciągły z impulsatorami istnieje realnie, o tyle system dyskretny jest jedynie schematem, czyli pewną abstrakcją. Po wyznaczeniu, zgodnie z procedurą (2.2) transmitancji $G_O(z)$ oraz $H_R(z)$, czyli zastępczych, dyskretnych transmitancji obiektu i regulatora, można przeprowadzić analizę własności powstałego w ten sposób systemu dyskretnego, rys. 3.2.



Rys. 3.2: Dyskretny układ automatycznej regulacji.