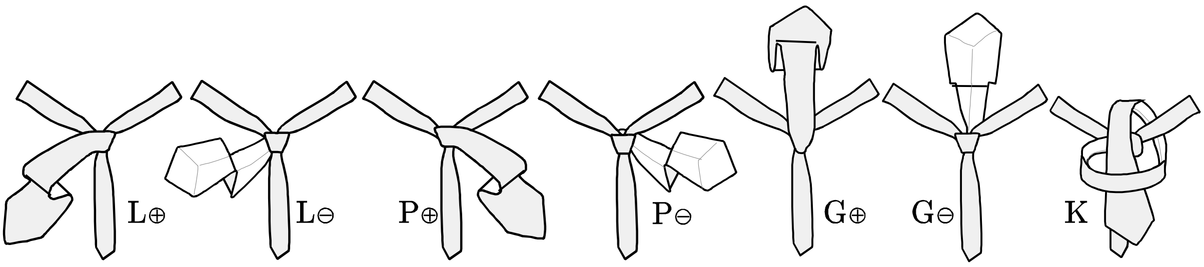
Teoria wiązania krawata

1. Węzeł jako sekwencja stanów

W procesie wiązania krawata można wyróżnić siedem stanów* oznaczonych symbolami: L⊖, L⊕, P⊖, P⊕, G⊖, G⊕ oraz K; patrz rys. 1 (podobnie jak pozostałe pokazuje on to, co widzimy stojąc przed lustrem). Litery L, P, G, K odnoszą się do położenia szerszego końca krawata i oznaczają odpowiednio: Lewo, Prawo, Góra i Koniec. Znak ⊕ informuje, że wierzch krawata, czyli jego szerszego końca widoczny jest w lustrze. Znak ⊖ mówi, że go nie widzimy, gdyż jest on zwrócony ku koszuli. Stan K jest końcowy, osiągnięcie go oznacza, że krawat został zawiązany.



Rys. 1: Stany charakterystyczne dla procesu wiązania krawata

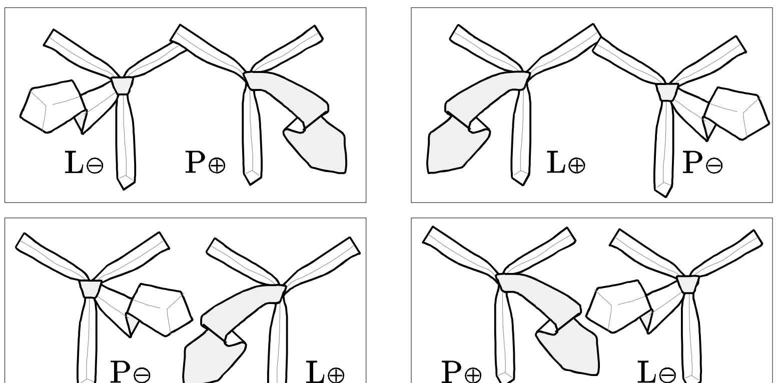
Wiązanie polega na przechodzeniu pomiędzy stanami w odpowiedniej kolejności. Przejście pomiędzy dwoma stanami np. od L⊖ do P⊕, co zapiszemy L⊖P⊕, nazywa się ruchem. Węzeł równoważny jest zatem sekwencji stanów, przez które przechodzi krawat podczas wiązania, np. L⊕P⊖G⊕L⊖P⊕G⊖K, to półwindsor wiązany w sześciu ruchach.

* T. Fink, Y. Mao, “Tie knots, random walks and topology“, Physica A, 276, 109–121, 2000. T. Fink, Y. Mao, "Designing tie knots by random walk", Nature, 398, 31-32, 1999. Patrz także: T. Fink, Y. Mao, “85 sposobów wiązania krawata, czyli węzeł węzłowi nierówny“, Media Rodzina, Poznań 2002.

2. Węzeł jako suma operacji

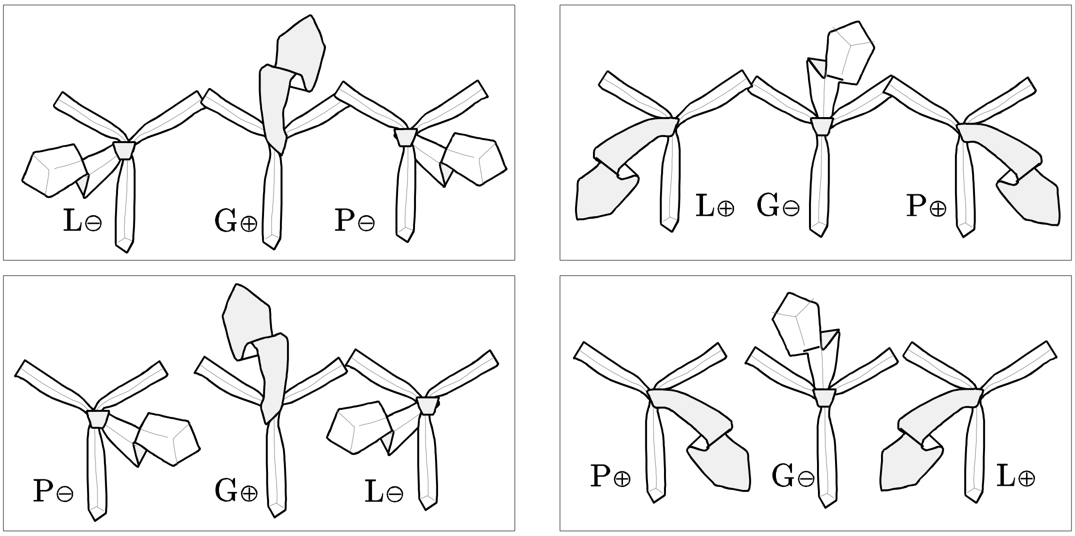
Przedstawimy teraz pojęcie operacji. Jest ich cztery, oznaczymy je jako ½O, S, S* oraz W. Symbole te pochodzą od wyrazów: Obrót, Środek i Węzeł orientalny.

Operacja ½O, czyli półobrót polega na wykonaniu poziomego półobrotu wykonanego szerszym końcem krawata w jedną albo drugą stronę, tzn. z lewej na prawą lub z prawej na lewą. Wszystkie cztery półobroty to, rys. 2: 1) L⊖P⊕, 2) L⊕P⊖, 3) P⊖L⊕, 4) P⊕L⊖.



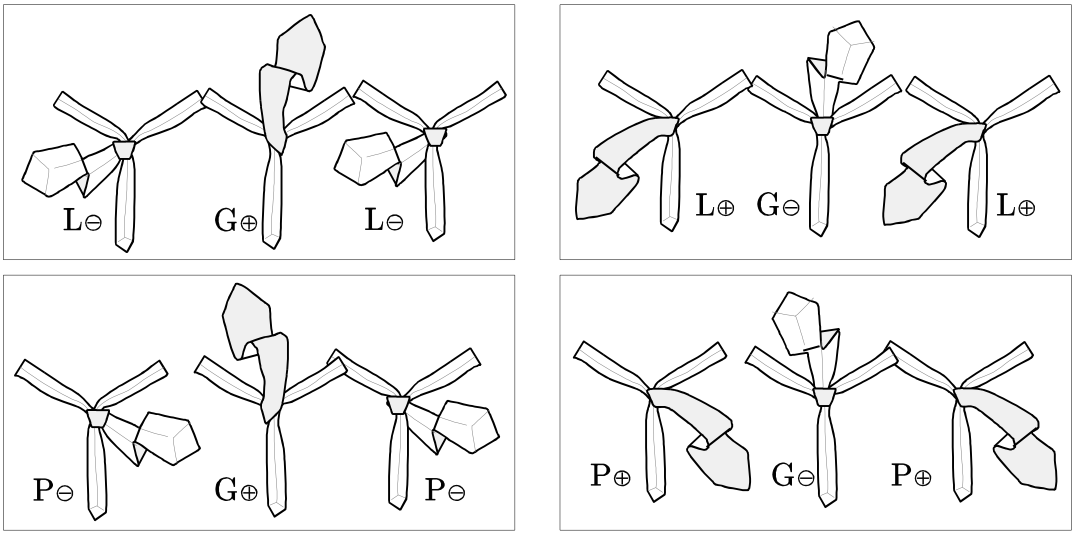
Rys. 2: Operacje ½O: L⊖P⊕, L⊕P⊖, P⊖L⊕, P⊕L⊖ (jeden ruch)

Operacja S, to także przełożenie szerszego końca krawata z jednego ramienia na drugi, ale w dwóch ruchach, patrz rys. 3. Krawat przechodzi bowiem przez pętlę pod brodą. Można ją wykonać na cztery sposoby, a mianowicie: 1) L⊖G⊕P⊖, 2) L⊕G⊖P⊕, 3) P⊖G⊕L⊖, 4) P⊕G⊖L⊕.



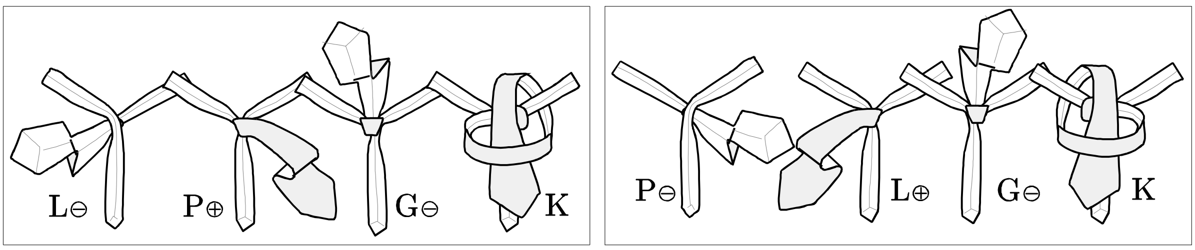
Rys. 3: Operacje S: L⊖G⊕P⊖, L⊕G⊖P⊕, P⊖G⊕L⊖, P⊕G⊖L⊕ (2 ruchy)

Operacja S*, rys. 4, jest pewną modyfikacją operacji S. Zaczynamy w niej jak w S, lecz wracamy na to samo ramię. Operację tę można wykonać także na czery sposoby, a to: 1) L⊖G⊕L⊖, 2) L⊕G⊖L⊕, 3) P⊖G⊕P⊖, 4) P⊕G⊖P⊕.



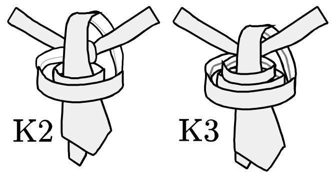
Rys. 4: Operacja S*: L⊖G⊕L⊖, L⊕G⊖L⊕, P⊖G⊕P⊖, P⊕G⊖P⊕ (2 ruchy)

Operację W, rys. 5, (czyli samoistny węzeł orientalny) można wykonać na dwa sposoby, a mianowicie: 1) L⊖P⊕G⊖K oraz 2) P⊖L⊕G⊖K.



Rys. 5: Operacja W: L⊖P⊕G⊖K, P⊖L⊕G⊖K (3 ruchy)

Niektóre węzły można zakończyć się nieco inaczej, patrz rys. 5a. Jeśli powstają dwie, a nawet trzy pętle, szerszy koniec krawata można przeciągnąć przez wszystkie, co doprowadza do stanów, które oznaczymy odpowiednio jako K2 i K3. Ostatnie trzy stany zapisujemy wtedy odpowiednio jako L⊕G⊖K2 lub L⊕G⊖K3, natomiast zmodyfikowaną w ten sposób operację W jako W2 lub W3. Węzły takie nazywane są krzyżowymi.



Rys. 5a: Zmodyfikowane stany końcowe

Operacja ½O zajmuje jeden ruch, S i S* po dwa ruchy każda, natomiast W zużywa trzy.

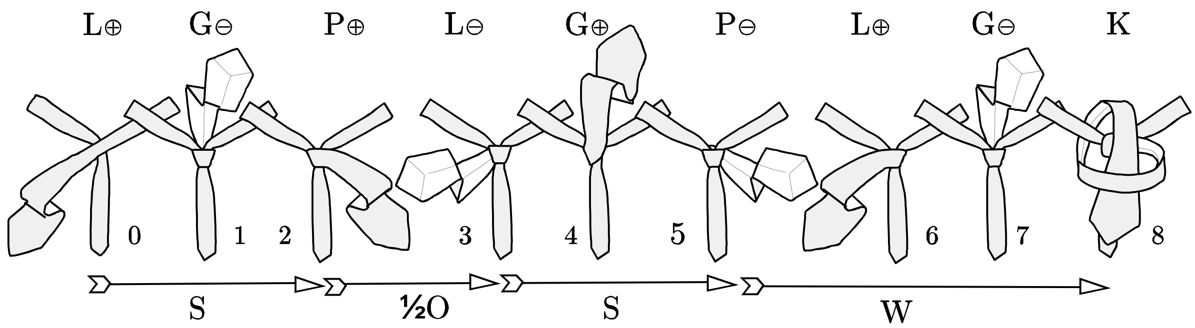
Jeśli wykonamy bezpośrednio po sobie dwie operacje półobrotu w tę samą stronę, to całość tę zapiszemy jako ½O+½O, co jest równoważne operacji O, czyli pełnemu obrotowi. Zatem np. ½O+½O=O, natomiast ½O+½O+½O=1½O. Podobnie możemy dodawać do siebie operacje S, co zapisujemy S+S=2S, a także operacje S*, co wyrazimy pisząc S*+S*=2S*. Przy różnych operacjach kolejność wykonywania jest istotna, bowiem np. ½O+S≠S+½O. Podobnie S+S*≠S*+S. Operacja W jest szczególna, gdyż w każdym węźle występuje tylko raz, jako ostatnia.

Węzeł jest sumą operacji, np. wspomniany już wcześniej windsor, rys. 6,

L⊕G⊖P⊕L⊖G⊕P⊖L⊕G⊖K

wiązany w 8 ruchach zapisujemy teraz jako

S + ½O + S + W.



Rys. 6: Windsor, to L⊕G⊖P⊕L⊖G⊕P⊖L⊕G⊖K, czyli S + ½O + S + W (osiem ruchów)

3. Zasady obowiązujące przy wiązaniu

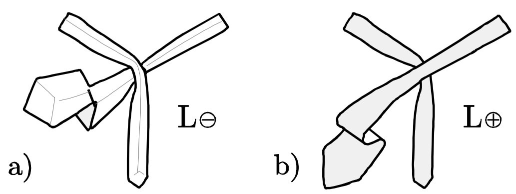
Przy wiązaniu krawata obowiązują trzy zasady:

(1) zaczynamy układając krawat w ten sposób, rys. 7, że:
   a) wierzch nie jest widoczny, co jest stanem L⊖ (węzeł wiąze się następnie w nieparzystej liczbie ruchów),
   b) wierzch jest widoczny, co jest stanem L⊖ (liczba ruchów będzie parzysta),

(2) ruchy wykonujemy szerszym końcem, węższy pozostaje nieruchomy,

(3) węzeł kończy się operacją W.

Dzięki zasadzie (2), węzeł możemy łatwo rozluźnić, a następnie rozwiązać. Zasada (3) zapewnia, że to co otrzymamy jest właśnie węzłem krawatowym.

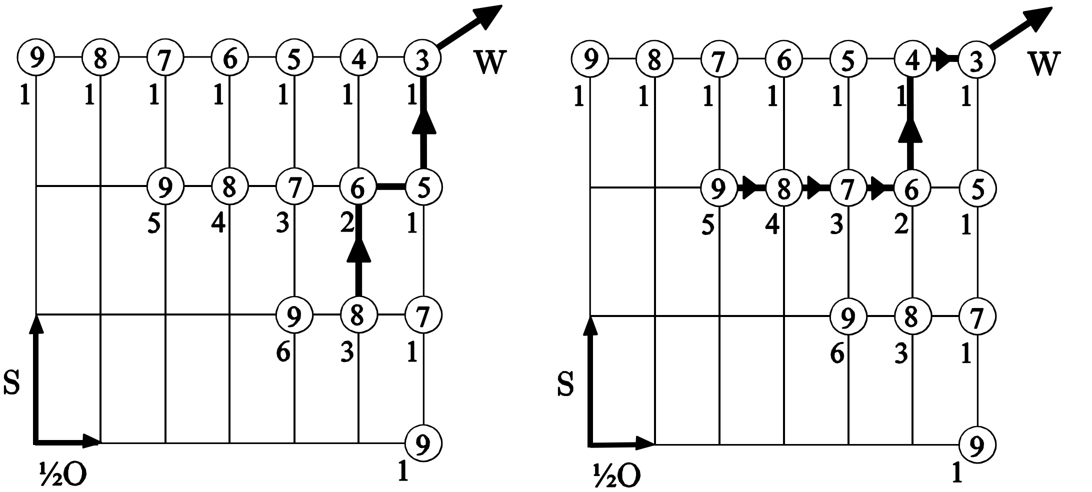


Rys. 7: Początek wiązania krawata. Wierzch: a) niewidoczny, b) widoczny

4. Węzeł i spacer po kracie

Odłożymy na chwilę na bok operację S* i ustalimy węzły jakie możemy zawiązać przy pomocy operacji O, S i W. Ograniczymy się przy tym do liczby ruchów nie większej niż 9.

Wiązanie węzła można przyrównać do spaceru po kracie pokazanej na rys. 8. Zaczynamy od dowolnego miejsca oznaczonego okręgiem. Poruszamy się jedynie w prawo lub do góry. Celem jest prawy, górny okrąg z wpisaną liczbą 3. Ruch w prawo, to operacja ½O, do góry, to S. Po dojściu do celu wykonujemy operację W, czyli wiążemy węzeł orientalny (w 3 ruchach, o czym informuje stosowna liczba w okręgu).



Rys. 8: Ścieżki na kracie odpowiadają węzłom.
Po lewej, to S+½O+S+W , czyli winsdsor zawiązywany w 8 ruchach.
Po prawej, to ½O+S+½O+W, czyli grantchester zawiązywany w 9 ruchach.

Poruszając się po ścieżce jak na rys. 8 po lewej stronie, wykonujemy zatem kolejno operacje S, ½O, S i na końcu W. Ścieżka ta odpowiada więc węzłowi S+½O+S+W, czyli windsorowi. Liczba 8 podana w okręgu, z którego wyszliśmy jest liczbą ruchów, w których wiąże się ten węzeł. Liczba 3 obok tego okręgu informuje, że 3 różne ścieżki wychodzące od niego prowadzą do celu. Zaczynając od niego, można zatem zawiązać 3 różne węzły. Oprócz windsora są to: 2S+½O+W oraz ½O+2S+W. Widzimy więc, że każdą ścieżkę można jednoznacznie utożsamić z jednym węzłem.

Ogólnie zatem, liczba w okręgu oznacza liczbę ruchów, w których wiąże się węzły odpowiadające ścieżkom w nim się zaczynających. Liczba obok okręgu oznacza liczbę wszystkich ścieżek prowadzących od niego do celu, czyli liczbę węzłów im odpowiadających.

Jest oczywiste, że w 3 i 4 ruchach można zawiązać jeden węzeł. W 5 ruchach można ich zawiązać 2, bowiem 1+1=2 (patrzymy na liczby obok okręgów, w których znajduje się liczba 5). W sześciu - 3, bowiem 1+2=3 (teraz patrzymy na liczby obok okręgów, w których znajduje się liczba 6). Wszystkich zatem węzłów, które można zawiązać w ten sposób w liczbie ruchów 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jest odpowiednio: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Wynika stąd, że w liczbie ruchów nie większej niż 9 można zawiązać 33 takie węzły, gdyż 1+1+2+3+5+8+13=33, 21 z nich zawiązuje się w nieparzystej, a 12 w parzystej liczbie ruchów.

Ogólnie, oznaczając przez $R(n)$ liczbę węzłów, które zawiązuje się w n ruchach, zauważamy, że

$$R(n) = R(n-1) + R(n-2),$$

gdyż węzły zawiązywane w n ruchach otrzymujemy dodając S (2 ruchy) do węzłów wiązanych w $n-2$ ruchach i ½O (1 ruch) do wiązanych w $n-1$ ruchach. Zatem $R(3)$, $R(4)$, $R(5)$, $R(6)$, $R(7)$, $R(8)$, ..., czyli 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., jest tzw. ciągiem Fibonacci'ego.

Zauważmy, że liczba węzłów możliwych do zawiązania w 10, 11 i 12 ruchach wynosi 21, 34 i 55. Rośnie więc ona bardzo szybko.

Otrzymane w opisany sposób 33 węzły podano w tablicach. Wyjątki, to rodziny nr 21 (van vijk) oraz 30 (christensen), reprezentowane przez węzły o zmodyfikowanej operacji W. Węzły uznawane za estetyczne noszą nazwy, pozostałe są bezimienne. Z tablicy wynika, np., że

windsor = S + półwindsor.

Każdy z węzłów podanych w tablicach jest w istocie przedstawicielem jednej rodziny, z których pozostałe otrzymuje się zamieniając operacje S na S*. Wszystkie węzły z jednej rodziny noszą tę samą nazwę. Jedynym wyjątkiem są S+W oraz S*+W, czyli nicky i pratt. Dla przykładu, rodzina windsor liczy cztery węzły, a mianowicie: S+½O+S+W, S*+½O+S+W (nazywany perskim), S+½O+S*+W oraz S*+½O+S*+W, który to węzeł jest być może najbardziej popularną wersją windsora.

Tablica 1. Rodziny węzłów zawiązywanych w nieparzystej liczbie ruchów *n*. Stanem początkowym jest L⊖

L.p.	*n*	Węzeł	Nazwa
1	*3*	W	orientalny
2	*5*	S+W	nicky
		S*+W	pratt
3	*5*	O+W	kelvin
4	*7*	2S+W	plattsburgh
5	*7*	S+O+W	
6	*7*	½O+S+½O+W	manhattan
7	*7*	O+S+W	św. Andrzej
8	*7*	2O+W	
9	*9*	3S+W	balthus
10	*9*	2S+O+W	
11	*9*	S+½O+S+½O+W	
12	*9*	S+O+S+W	
13	*9*	S+2O+W	
14	*9*	½O+2S+½O+W	
15	*9*	½O+S+½O+S+W	hanover
16	*9*	½O+S+1½O+W	
17	*9*	O+2S+W	
18	*9*	O+S+O+W	
19	*9*	1½O+S+½O+W	grantchester
20	*9*	2O+S+W	
21	*9*	3O+W	
		3O+W3	van vijk

Tablica 2. Rodziny węzłów zawiązywanych w parzystej liczbie ruchów *n*. Stanem początkowym jest L⊕

L.p.	*n*	Węzeł	Nazwa
22	*4*	½O+W	prosty
23	*6*	S+½O+W	
24	*6*	1½O+W	victoria
		1½O+W2	albert
25	*6*	½O+S+W	półwindsor
26	*6*	2S+½O+W	
27	*8*	S+½O+S+W	windsor
		S*+½O+S+W	perski
28	*8*	S+1½O+W	
29	*8*	½O+2S+W	
30	*8*	½O+S+O+W	
		½O+S+O+W2	christensen
31	*8*	O+S+½O+W	cavendish
32	*8*	1½O+S+W	
33	*8*	2½O+W	

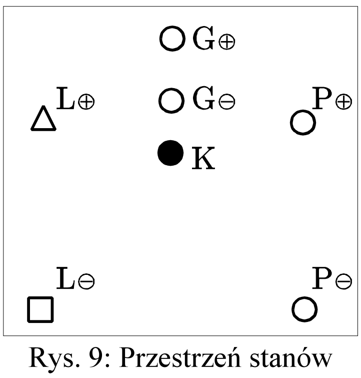
Dołączmy do naszych rozważań operację S*. Oznaczając przez $W(n)$ liczbę wszystkich węzłów, które można teraz (tzn. przy pomocy operacji ½O, S, W oraz dołączonej S*) zawiązać w n ruchach, zauważamy, że

$$W(n+1) = 2W(n-1) + W(n).$$

Ponadto $W(3)=W(4)=1$. Zatem w 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 ruchach można zawiązać 1, 1, 3, 5, 11, 21 i 43 węzły. W liczbie ruchów nie większej niż 9 można więc ich zawiązać 85, ponieważ 1+1+3+5+11+21+43=85. Liczba wszystkich węzłów, które można zawiązać w 10, 11 i 12 ruchach jest natomiast równa 85, 171 i 341. Narasta ona jeszcze szybciej niż liczba rodzin. Z tego też względu ograniczyliśmy się do 9 ruchów.

5. Węzeł jako trajektoria w przestrzeni stanów

Siedem stanów krawata można przedstawić graficznie jak na rys. 9.

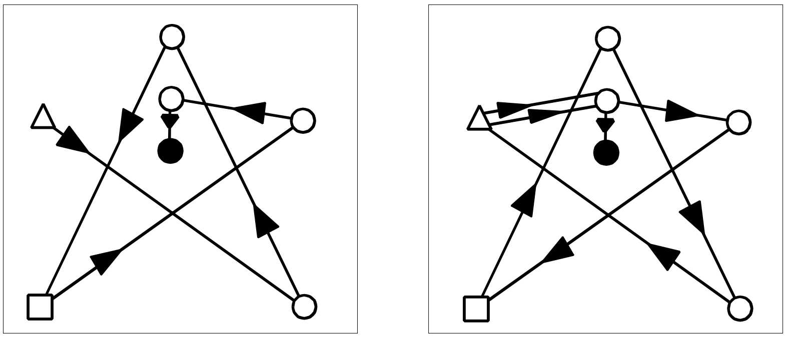


Rys. 9: Przestrzeń stanów

Każdy jest reprezentowany przez okrąg, trójkąt lub kwadrat, przy którym znajduje odpowiedni symbol stanu. Tworzą one tzw. przestrzeń stanów. Jak już wiemy, wiązaniu krawata odpowiada przechodzenie on jednego stanu do drugiego. Ścieżka, która powstaje w ten sposób nazywa się trajektorią. Trajektorie węzłów wiązanych w parzystej liczbie ruchów zaczynają się w stanie L⊕ zanaczonym jako trójkat, w nieparzystej w stanie L⊖ zaznaczonym jako kwadrat. Wszystkie kończą się w stanie K zaznaczonym czarnym kołem.

Trajektorie odpowiadające półwindsorowi

i windsorowi pokazano na rys. 10. Obie zaczynają się w stanie L⊕ oznaczonym trójkatem. Zauważmy, że trajektoria półwindsora przechodzi przez wszystkie stany i przez każdy tylko jeden raz. Nie zawiera jednak wszystkich możliwych połączeń pomiędzy stanami (brakuje połączenia pomiędzy L⊕ i G⊖). Odpowiadająca windsorowi także łączy wszystkie stany, a ponadto korzysta ze wszystkich możliwych połączeń pomiędzy stanami (zauważmy w tym miejscu, że nie każde dwa stany można połączyć jednym ruchem, np. L⊕ nie można połączyć z P⊕). Pełna symetria jest w obu zakłócona przez jeden ruch, niejako brakujący lub nadmiarowy. Całkowicie symetryczny węzeł jednak nie istnieje.



Rys. 10: Trajektorie półwindsora (L⊕P⊖G⊕L⊖P⊕G⊖K)
i windsora (L⊕G⊖P⊕L⊖G⊕P⊖L⊖G⊖K)

7. Kilka ciekawostek

Ojczyzną krawata jest Chorwacja, stąd też nazwa tego akcesorium. Węzeł prosty nazywa się tam pojedynczym, a victorię podwójnym węzłem księcia Borna. Półwindsor to pojedynczy węzeł króla Tomisława, a windsor - podwójny.

Nazwy windsor i półwindsor pochodzą od księcia Windsoru, wcześniej Edwarda VIII, króla Anglii. Albert z kolei przypisywany jest księciu Albertowi, mężowi angielskiej królowej Wiktorii. Windsor nie był jednak podobno wcale ulubionym węzłem księcia Windsoru, a w czasach księcia Alberta węzeł noszący dziś jego imię nie był jeszcze znany.

W Anglii węzeł prosty, to *four-in-hand*. Nazwa ta wywodzi się od powozu zaprzęganego w cztery konie, czy też sposobu w jaki trzymano lejce w połowie XIX wieku, gdy zaczęto tak właśnie wiązać krawat.

We Francji węzeł orientalny nazywa się małym, *four-in-hand* - prostym, a victoria jest podwójnym prostym. Nazwy windsor, rzecz jasna, tam nie uznają, nazywając go węzłem podwójnym.

Pratt, to nazwisko pewnego Amerykanina, który wynalazł stosowny węzeł, a który *New York Times* zaprezentował w 1989 roku. Inna jego nazwa, czyli shelby, pochodzi od nazwiska człowieka, który zaprezentował go w telewizji. Czasami nazywany jest on węzłem amerykańskim.

Nicky nazywają także *free american* choć niektórzy sądzą, że to pomysł włoski.

Mimo, że znany był wcześniej, christensen pochodzi od nazwiska szwedzkiej producentki krawatów, która go jedynie wylansowała w okresie międzywojennym.

Balthus natomiast, to wynalazek Balthasara Klossowskiego malarza z okresu międzywojennego.